VIVERE!
VINCERE!
CREARE!

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

В.М. Васильєв, В.П. Харченко

МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОНАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМ

ОБРОБЛЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ТА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У СИСТЕМІ КЕРУВАННЯ ПОВІТРЯНИМ РУХОМ

Навчальний посібник

Київ 2008

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

В.М. Васильєв, В.П. Харченко

МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОНАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМ

ОБРОБЛЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ТА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У СИСТЕМІ КЕРУВАННЯ ПОВІТРЯНИМ РУХОМ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів

Київ 2008

УДК 004.94:629.735.051:656.7.052(075.8)
ББК О571я7
В 191

Рецензенти: *Ю.С.Мішура* – д-р ф.-мат. наук, професор кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (зав. кафедри)
С.Я. Жук – д-р техн. наук, професор кафедри радіотехнічних приладів та систем Національного технічного університету України (КПІ)
Ю.В. Куц – д-р техн. наук, професор кафедри інформаційно-вимірювальних систем Національного авіаційного університету (зав. кафедри)

Васильев В.М.

В191 Моделювання аеронавігаційних систем. Оброблення інформації та прийняття рішень в системі керування повітряним рухом: навч. посіб. / В.М. Васильєв, В.П. Харченко. – К.: НАУ, 2008. – 180 с

ISBN 978–966–598–444–3

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист за № 14/18-Г-368 від 8 лютого 2008 року)

Висвітлено питання організації і проведення математичного та комп'ютерного моделювання систем аеронавігаційного обслуговування, їх складових елементів, а також моделювання інформаційних процесів та прийняття рішень у системі керування повітряним рухом. Наведено методи дослідження та оцінювання характеристик системи повітряного руху.

Для студентів спеціальностей 8.100118 «Системи аеронавігаційного обслуговування»" та 8.100109 «Обслуговування повітряного руху».

УДК 004.94:629.735.051:656.7.052(075.8)
ББК О571я7

ISBN 978–966–598–444–3

© Васильєв В.М., Харченко В.П., 2008

ЗМІСТ

Перелік скорочень 5
Передмова 7
Вступ 10
1. Система керування повітряним рухом як об'єкт дослідження і моделювання 12
1.1. Завдання, що розв'язуються системою керування повітряним рухом 12
1.2. Організація системи повітряного руху та чинники, що впливають на її функціонування 14
1.3. Організація моделювання системи керування повітряним рухом 18
2. Математичний опис процесів і систем 24
2.1. Опис системи «вхід–вихід» 24
2.2. Опис системи «вхід–стан–вихід» 25
2.3. Зв'язок описів «вхід–вихід» і «вхід–стан–вихід» 28
2.4. Дискретизація математичних моделей 29
3. Моделювання стохастичних процесів та систем 35
3.1. Моделювання випадкових подій 35
3.2. Моделювання випадкових величин 38
3.3. Моделювання випадкових процесів 41
4. Оброблення і аналіз результатів моделювання 49
4.1. Оцінювання ймовірності випадкової події 49
4.2. Оцінювання характеристик випадкової величини 50
4.3. Оцінювання характеристик випадкового процесу 51
4.4. Інтервальна оцінка 53
4.5. Перевірка статистичних гіпотез 54
5. Моделювання траєкторій руху літаків 57
5.1. Динамічні моделі керованого руху літака 57
5.2. Кінематичні моделі керованого руху літака 63
5.3. Детерміновані моделі руху літака 66
5.4. Імовірнісні моделі руху літаків 69
6. Моделювання траєкторних вимірювань 72
6.1. Моделювання радіолокаційних вимірювань 72
6.2. Статистичні характеристики похибок траєкторних вимірювань 74
7. Моделювання процесів оброблення траєкторної інформації 77

7.1. Постановка завдання моделювання траєкторного оцінювання ... 77
7.2. Моделювання рекурентних алгоритмів траєкторного оцінювання ... 79
7.3. Моделювання алгоритму ковзного згладжування ... 81
8. Моделювання процесів планування повітряного руху ... 85
8.1. Завдання автоматизації процесу поточного планування ... 85
8.2. Математичні моделі для розрахунку просторово-часової траєкторії польоту ... 87
8.3. Сполучення розрахованих профілів польоту ... 96
9. Моделювання системи повітряного руху як системи масового обслуговування ... 102
9.1. Характеристики системи масового обслуговування ... 102
9.2. Моделювання випадкових потоків подій ... 106
9.3. Моделювання обслуговуючих систем ... 108
9.4. Моделювання системи оперативного керування повітряним рухом як системи масового обслуговування ... 112
10. Моделювання в системі підтримання прийняття рішень щодо керування повітряним рухом ... 119
10.1. Функції системи підтримки прийняття рішень у процесі керування повітряним рухом ... 119
10.2. Попередження небезпечного зближення літаків в системі керування повітряним рухом ... 125
10.3. Системи попередження зіткнення літаків ... 128
10.4. Оцінювання ймовірності потенційно конфліктних ситуацій ... 135
10.5. Багатоальтернативний метод прийняття рішення ... 147
11. Оцінювання характеристик системи повітряного руху ... 157
11.1. Оцінювання ймовірності потенційно конфліктних ситуацій у разі перетинання трас ... 157
11.2. Оцінювання ризику зіткнення під час організації польотів на паралельних трасах ... 162
11.3. Визначення безпечної ширини траси і періодичності коригування місцеположення літака ... 171
11.4. Оцінювання завантаженості повітряного простору ... 177
Післямова ... 185
Список літератури ... 177

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АБСК – автоматизована бортова система керування
АНС – аеронавігаційна система
АС КПР– автоматизована система керування повітряним рухом
БСЗЗ – бортова система запобігання зіткненню
ВПМ – вихідний пункт маршруту
ДКХ – дуже короткі хвилі;
ЗШК – заданий шляховий кут.
КПМ – кінцевий пункт маршруту
КПР – керування повітряним рухом
ЛЗШ – лінія заданого шляху
ЛПР – лінійне попередження розвороту
ЛТХ – льотно-технічні характеристики
НС – навігаційна система
МЕТ – метеорологічне забезпечення аеронавігації
ОПП – організація повітряного простору
ОППР – організація потоків повітряного руху
ОПР – обслуговування повітряного руху
ОрПР – організація повітряного руху
ПВП – правила візуальних польотів
ПЕПП – підконтрольний елемент повітряного простору.
ПК – повітряний корабель
ПКС – потенційно-конфліктна ситуація
ПП – повітряний простір
ППП – правила польотів за приладами
ППМ – проміжний пункт маршруту
ПР – повітряний рух
РЛС – радіолокаційна станція
СМО – система масового обслуговування
ACAS – Airborne Collision Avoidance System (бортова система запобігання зіткненню)

ATC – Air Traffic Control (керування повітряним рухом)
ATM – Air Traffic Management (організація повітряного руху)
ATS – Air Traffic Service (обслуговування повітряного руху)
CAS – Collision Avoidance System (система запобігання зіткненню)
CDR – Conflict Detection and Resolution (виявлення та розв'язання конфліктів).
CNS – Communication, Navigation, Surveillance (система зв'язку, навігації, спостереження).
COM – Communication (служби авіаційного електрозв'язку)
CPA – Closest Point of Approach (точка найбільшого зближення літаків)
CPDLC – Controller-Pilot Data Link Communication (лінія зв'язку «диспетчер–пілот»)
DSS – Decision Support System (система підтримання прийняття рішень)
FIS – Flight Information Service (польотно-інформаційне обслуговування)
FMS – Flight Management System (система керування польотом)
HMI – Human-Machine Interface (людино-машинний інтерфейс),
RA – Resolution Advisory (рекомендація із запобігання загрозі зіткнення)
RNAV – Area Navigation (зональна навігація)
RNP – Required Navigation Performance (потрібні навігаційні характеристики)
RVSM – Reduced Vertical Separation Minimum (скорочений мінімум вертикального ешелонування)
ICAO – International Civil Aviation Organization (Міжнародна організація цивільної авіації)
SAI – System of Air Navigation (система аеронавігаційної інформації)
SAR – Search and Rescue (служба пошуку і порятунку)
SMS – Safety Management System (система управління безпекою)
TA – Traffic Advisory (консультативна інформація про повітряний рух)
TCAS – Traffic Conflict Alert System (система запобігання зіткненню)

ПЕРЕДМОВА

Аеронавігаційні системи (АНС) призначені для забезпечення аеронавігаційного обслуговування польотів, яке складається з обслуговування повітряного руху (ATS), служби авіаційного електрозв'язку (COM), метеорологічного забезпечення аеронавігації (MET), пошуку і порятунку (SAR), служби аеронавігаційної інформації (AIS). Обслуговування повітряного руху включає керування повітряним рухом (КПР), польотно-інформаційне обслуговування (FIS) та аварійне сповіщення.

Потреба в підвищенні ефективності повітряних перевезень з урахуванням наявного прогнозу щодо їх збільшення спонукає вдосконалювати і розробляти нові аеронавігаційні системи і впроваджувати нові концепції організації повітряного руху, спрямовані на підвищення пропускної здатності системи повітряного руху з метою збільшення економічності повітряних перевезень.

Основною характеристикою системи повітряного руху є її безпека. Тому будь-яка модернізація існуючої аеронавігаційної системи або впровадження нової не повинні призводити до зниження рівня безпеки повітряного руху.

Моделювання є ефективним, а в багатьох випадках, зазвичай пов’язаних з безпекою польотів, єдино можливим методом вивчення та дослідження аеронавігаційних систем. Методи моделювання застосовують, починаючи з етапу обстеження системи, складання технічного завдання на її розроблення, під час технічного та робочого проектування, впровадження та обслуговування системи, а також для навчання і тренажу.

Навчальна дисципліна «Моделювання аеронавігаційних систем» відноситься до фундаментальних та професійно-орієнтованих дисциплін у системі підготовки фахівців за спеціальністю 8.100118 «Системи аеронавігаційного обслуговування» та 8.100109 «Обслуговування повітряного руху» напряму «Авіація та космонавтика».

Отримані в процесі вивчення дисципліни знання є необхідною базою для того, щоб оцінювати ефективність функціонування

аеронавігаційних систем та їх компонентів, розробляти обґрунтовані варіанти вдосконалення функціонування систем, досліджувати їх, проектувати та експлуатувати.

Мета дисципліни – навчання студентів методу моделювання як методу вивчення і дослідження АНС та їх компонентів.

Завдання дисципліни полягає в оволодінні студентами різноманітних методів математичного і комп'ютерного моделювання процесів і систем для вивчення та дослідження аеронавігаційних систем; організації і проведення на комп'ютері аналітичного та статистичного моделювання АНС та її компонентів; процесів управління і прийняття рішень; методів оцінювання характеристик і показників АНС за результатами моделювання.

Дисципліна «Моделювання аеронавігаційних систем» є однією із заключних і логічно ґрунтується на знаннях, отриманих під час вивчення таких дисциплін, як «Основи авіації та космонавтики», «Вища математика», «Фізика», «Основи обчислювальної техніки та програмування», «Основи аеродинаміки та динаміки польоту», «Теорія автоматичного керування», «Інтерактивні системи та відображення інформації», «Комп'ютеризовані системи обробки інформації та керування», «Теорія навігаційних систем», «Теорія локаційних систем», «Теорія аерокосмічного зв'язку», «Системотехніка та основи проектування», «Радіолокаційні комплекси керування повітряним рухом», «Аеронавігаційне обслуговування», «Інтегровані аеронавігаційні системи», «Методи та засоби аеронавігаційних систем».

Унаслідок вивчення дисципліни студент здобуває знання та набуває вмінь:

– застосовувати математичне моделювання для вивчання та дослідження інформаційних процесів і керування в АНС;

– організовувати проведення моделювання на комп'ютері, зокрема статистичне моделювання;

– моделювати і досліджувати роботу окремих складових АНС;

– моделювати роботу математичного і програмного забезпечення, що використовується в програмних комплексах та окремих програмних модулях автоматизованих систем аеронавігаційного обслуговування польотів;

– досліджувати методи та алгоритми обробки аеронавігаційної інформації;

– досліджувати методи прийняття рішення в процесі КПР;

– моделювати і досліджувати конфліктні ситуації в повітряному русі і методи запобігання їм;

– оцінювати характеристики та основні показники АНС і її компонентів за результатами моделювання;

– оцінювати показники безпеки польотів, вплив різних чинників та поліпшення показників із застосуванням відповідних АНС;

– працювати в середовищі операційних систем, стандартних прикладаннях, а також системах програмування високого рівня;

– використовувати сучасні пакети програм моделювання;

– створювати та імітувати програмне забезпечення окремих компонентів АНС і функціональних тренажерів.

В навчальному посібнику розглянуто систему обслуговування повітряного руху (ОПР) як об'єкт дослідження і моделювання. Розглянуто організацію моделювання системи КПР та математичний опис процесів і систем. Наведено методику моделювання: стохастичних процесів; динамічної польотної ситуації; системи спостереження та траєкторних вимірювань; процесів обробки траєкторної інформації; процесів планування повітряного руху. В окремому розділі розглянуто моделювання системи повітряного руху як системи масового обслуговування (СМО). Значну увагу приділено моделюванню прийняття рішень під час КПР, попередження про небезпечне зближення літаків у системах запобігання зіткненням (CAS – Collision Avoidance System). Наведено методи оцінювання імовірності потенційно конфліктних ситуацій., у тому числі методом статистичного моделювання. Визначено багатоальтернативний метод прийняття рішення. Розглянуто методи оцінювання характеристик системи повітряного руху: ймовірності потенційно конфліктних ситуацій у разі перетинання трас; ризику зіткнення під час організації польотів на паралельних трасах; визначення безпечної ширини траси і періодичності корекції місцеположення літака під час КПР; оцінювання завантаженості повітряного простору. Розглянуто також обробку та аналіз результатів моделювання.

ВСТУП

Цивільна авіація – один із чинників світового розвитку, у якому спостерігається тенденція глобалізації міжнародних і міжнаціональних відносин. Це виявляється в реалізації концепції глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження й організації повітряного руху – CNS/ATM (Communication, Navigation, Surveillance/Air Traffic Management).

Організація повітряного руху (ОрПР) спрямована на ефективний і раціональний розподіл повітряного простору, забезпечення ефективного планування його використання, застосування авіаційної техніки, гарантування безпеки повітряного руху, забезпечення економічності та регулярності міжнародних і внутрішніх рейсів.

Основними завданнями вдосконалення організації повітряного руху є: збільшення пропускної здатності системи і безпеки КПР через удосконалення таких компонентів системи, як спостереження за повітряним рухом, зв'язок, а також підвищення рівня автоматизації процесів КПР; удосконалення організації потоків повітряного руху (ОППР) шляхом оптимізації потоків, підвищення оперативності планування, а також вдосконалення організації повітряного простору (ОПП) через оптимізацію його використання.

Основне завдання КПР полягає в запобіганні зіткненням повітряних кораблів (ПК) один з одним та з перешкодами в зоні маневрування, а також у регулюванні повітряного руху з урахуванням метеорологічних умов.

Система КПР належить до складних систем з ієрархічною структурою керування, основними характеристиками яких є: наявність замкнених підсистем з явно вираженими локальними властивостями; існування глобального критерію оптимальності для системи в цілому і локальних критеріїв для окремих підсистем; ієрархічність структури керування із встановленими рівнями підпорядкованості; тісний зв'язок між підсистемами та між усією системою і взаємодіючими з нею іншими системами; наявність у контурі прийняття рішень і керування людини -диспетчера.

Потребу в застосуванні теорії моделювання для створення й дослідження функціонування системи КПР викликано тим, що для складних систем, до яких належить і система КПР, етапи проектування, упровадження, експлуатації й модернізації неможливі без використання різних методів моделювання.

Переваги методу статистичного моделювання: можливість дослідження особливостей функціонування системи КПР у різних умовах, гнучкість видозмінювання структури модельованої системи, її алгоритмів і програм.

Під час дослідження та проектування системи КПР виникають численні завдання, що потребують оцінювання кількісних і якісних закономірностей процесів функціонування системи, а також організаційних, структурних, технологічних, технічних, алгоритмічних, інформаційних та інших вдосконалень. При цьому потрібно враховувати: складність структури, стохастичність процесів, неоднозначність алгоритмів поводження й прийняття рішень у різних умовах, велику кількість параметрів і змінних, неповноту і стохастичність вихідної інформації, розмаїтість і ймовірнісний характер впливу зовнішнього середовища та ін.

На різних етапах створення й використання системи КПР застосовують методи моделювання для виконання конкретних завдань, а ефективність цих методів залежить від того, наскільки успішно використовуються можливості моделювання.

Роль методів моделювання суттєво зростає у зв'язку з перспективою впровадження нових концепцій організації повітряного руху, таких як «кооперативне керування повітряним рухом» (Cooperative Air Traffic Management), «вільний політ» (Free Flight), «від перону до перону» (Gate to Gate), і переходом від традиційної централізованої організації системи КПР до децентралізованого керування, що спрямовано на підвищення ефективності системи повітряного руху в умовах прогнозованого суттєвого зростання повітряних перевезень.

1. СИСТЕМА КЕРУВАННЯ ПОВІТРЯНИМ РУХОМ ЯК ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ І МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. Завдання, що розв'язуються системою керування повітряним рухом

Керування повітряним рухом має забезпечувати:

– постійний контроль за повітряною обстановкою й керуванням процесом виконання польотів через команди для встановлення та підтримання регламентованого порядку руху ПК, передавання інформації екіпажам ПК про метеорологічні умови і повітряну обстановку;

– запобігання небезпечним зближенням ПК у польоті та зіткненням з наземними перешкодами;

– вжиття своєчасних заходів щодо надання допомоги екіпажам ПК в особливих умовах та особливих випадках у польоті.

Диспетчери, що керують рухом ПК, зобов'язані контролювати виконання планів польотів, правил польотів, встановлені безпечні інтервали між ПК у польоті, не допускати відхилень за межі встановленої ширини повітряних трас, місцевих повітряних ліній, коридорів, маршрутів і схем набору висоти, зниження і заходу на посадку; відхилення від плану допускається за узгодженням із вищими органами служби руху.

Керування повітряним рухом має бути неперервним, надійним та оперативним. Воно складається з таких процесів:

– збору інформації, необхідної для КПР;
– обробки інформації;
– відображення інформації;
– аналізу повітряної обстановки;
– формування рішень;
– передавання команд керування.

Основою безпеки повітряного руху є чітке регулювання, засноване на своєчасному одержанні достовірної інформації про порушення плану польоту або тенденції до порушення.

Для забезпечення безпеки повітряного руху застосовують спеціальні правила й режими польотів. Правила визначають умови й нормативи виконання польотів авіації усіх відомств у визначених частинах повітряного простору. Застосовують такі правила: правила витримування безпечних висот, що визначають порядок розрахунку мінімальної безпечної висоти польоту, правила візуальних

польотів (ПВП), правила польотів за приладами (ППП) і особливі ПВП, що визначають порядок виконання польотів у різних метеорологічних умовах, та методи забезпечення безпечних інтервалів.

Попередження зіткнень літаків у повітрі забезпечується дотримуванням установлених правил ешелонування, згідно з якими у процесі виконання польотів літаки не повинні наближатися один до одного на відстань, меншу за встановлену безпечну відстань в плані й по висоті. Існує три види ешелонування: вертикальне, поздовжнє і бічне, що забезпечують безпечне розділення літаків за трьома координатами.

Нині використовують такі способи КПР: радіолокаційне, процедурне та консультативне. Радіолокаційне керування здійснюється на основі радіолокаційної та іншої інформації про фактичну польотну ситуацію для неперервного контролю за рухом ПК з використанням інформації поточних планів польотів, за якого забезпечується радіолокаційне ешелонування ПК. Процедурне керування здійснюється згідно з поточними планами польотів і повідомленнями екіпажів ПК із використанням процедур та методів керування, що забезпечують нерадіолокаційне ешелонування ПК.

Основним джерелом інформації про поточну польотну ситуацію під час КПР сьогодні є радіолокаційні системи.

У процесі проектування нових систем КПР особливу увагу приділяють питанням підвищення ефективності системи зв'язку, навігації й спостереження за рахунок:

– передавання даних і мовного зв'язку в цифровому вигляді за допомогою супутників;

– використання дуже короткохвильового (ДКХ) мовного зв'язку;

– передавання даних за допомогою вторинних радіолокаторів у режимі S у зонах із високою інтенсивністю повітряного руху;

– застосування зональної навігації;

– використання глобальної супутникової системи навігації;

– використання автоматичного залежного спостереження.

Під час організації й обслуговуванні повітряного руху потрібно враховувати вимоги економічності, що є одними з основних показників роботи цивільної авіації. З цього погляду роль служби КПР полягає у скороченні часу перебування літаків у повітрі, призначенні для польоту оптимального режиму на економічно вигідній висоті.

1.2. Організація системи повітряного руху та чинники, що впливають на її функціонування

Основними цілями системи повітряного руху є: збільшення пропускної здатності системи; підвищення рівня безпеки польотів; поліпшення умов роботи експлуатаційного персоналу (диспетчерів, пілотів, інженерів та ін.).

Система повітряного руху складається з таких основних елементів: інфраструктури, системи організації повітряного руху, людських ресурсів.

Інфраструктура – це власне повітряний простір, система навігації та аеродроми.

До людських ресурсів відносять персонал служб систем організації повітряного руху та аеродромів.

Організація повітряного руху спрямована на ефективний і раціональний розподіл повітряного простору, забезпечення ефективного планування його використання, використання авіаційної техніки, забезпечення безпеки повітряного руху, економічності та регулярності міжнародних і внутрішніх рейсів.

Організація повітряного руху передбачає організацію повітряного простору, організацію потоків повітряного руху і безпосереднє КПР.

Для ОПП встановлюють раціональну мережу повітряних трас, розподіляють повітряний простір на структурні елементи, формують пункти і органи КПР, а також будують всю структуру керування системою в цілому.

Планування і ОППР руху проводять з метою приведення планованого руху ПК у відповідність із розрахунковою пропускною здатністю органів КПР, повітряного простору й аеродромів з урахуванням змін метеорологічних умов, а також відмов радіотехнічних засобів, вимушених об'єднань секторів, уведення місцевих і тимчасових режимів польотів та обмежень.

За високої інтенсивності польотів керування потоками стає найважливішою частиною системи повітряного руху. Це покликано мінімізувати ймовірність появи небезпечних умов, пов'язаних з перевантаженням повітряного простору і диспетчерських пунктів, а також зменшити вартість і складність КПР.

Особливість процесу планування повітряного руху (ПР) полягає в тому, що часто в одному процесі поєднуються організація потоків ПК і планування в часі.

Планування ПР підрозділяється на види (етапи): попереднє (перспективне), добове й поточне.

Планування ПР є одним із перших етапів вирішення завдання щодо забезпечення безпеки польотів.

Попереднє планування проводять у період складання розкладу руху ПК і їх коригування. Добове планування ПР, що полягає в складанні добового плану потоків ПР, здійснюють напередодні дня польотів. Поточне планування ПР виконують органи КПР у процесі виконання польотів з метою коригування програми руху ПК у районах (зонах) КПР.

Розрізняють дві фази поточного планування. Перша фаза здійснюється в межах району (зони) КПР до моменту надходження до органів КПР інформації про вхід ПК у зону відповідальності, друга фаза – від моменту надходження до органів КПР інформації про вхід у зону відповідальності.

Основне завдання поточного планування полягає у розрахунку безконфліктних просторово-часових траєкторій польотів відповідно до реальної польотної ситуації на підставі оперативно обновлюваної інформації про зміну умов виконання польотів, метеорологічних умов, зміни обмежень і пропускної здатності системи КПР.

Кожен запланований політ повинен мати радіотехнічний, метеорологічний, штурманський, аеронавігаційний, аеродромний, інженерно-авіаційний, медичний та інші види забезпечення.

Безпосереднє КПР здійснює персонал служби руху центрів КПР і диспетчерських пунктів аеродромів.

Основним елементом системи КПР, що приймає рішення щодо КПР, є диспетчер. Від того, наскільки оптимально вирішено питання взаємодії диспетчерів із технічними засобами, що забезпечують КПР, і екіпажами ПК, багато в чому залежить ефективність усієї системи.

Для системи КПР, як для будь-якої складної системи керування, характерна ієрархічність структури системи у поєднанні з принципами централізації і децентралізації. Так, органи оперативного КПР, розташовані на нижньому рівні ієрархії, самостійно вирішують тактичне завдання КПР під час виконання польотів. На верхньому

ієрархічному рівні – органи загального керівництва системою КПР, вони видають директиви, вказівки та ін.

Вирішуючи завдання підвищення ефективності системи ОрПР важливе місце відводять засобам і процедурам автоматизації, використанню автоматизованих систем керування повітряним рухом (АС КПР). Мета автоматизації – знизити або виключити обмеження, що накладаються на операції з організації й обслуговування повітряного руху.

Відповідно до сучасної концепції розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження й ОрПР з використанням супутникових систем і нових інформаційних технологій передбачається інтеграція національних і міжнародних систем ОрПР та аеродромних автоматизованих систем.

Основна мета інтегрованої системи ОрПР – дати змогу експлуатантам ПК дотримуватись планованого часу вильоту й прибуття та витримувати найкращі профілі польоту за мінімальних обмежень і без зниження погоджених рівнів безпеки польотів.

Незважаючи на планування польотів і використання АС КПР, надходження літаків у конкретну зону керування й у цілому поточна польотна ситуація мають випадковий характер.

Об'єкт керування – літак у процесі польоту піддається впливу численних чинників, що вносять невизначеність у його положення в зоні керування – це похибки навігаційних систем, помилки літаководіння, вплив випадкових збурювальних чинників, зокрема й атмосферних явищ та ін.

Засоби контролю положення літаків, у свою чергу, мають досить високий рівень похибок.

Для встановлення безпечних відстаней між літаками норми вертикального ешелонування визначають похибками висотоміра і помилками пілотування, а встановлюючи норми горизонтального ешелонування, враховують такі чинники, як точність визначення місцеположення літаків; габарити і маневрені характеристики літака; точність літаководіння; чинники контролю, що залежать від затримок у встановленні радіозв'язку «борт–земля», чіткості дій екіпажа й диспетчера при надходженні запитів (команд), а також способів передавання й частоти відновлення інформації тощо; суб'єктивні чинники, пов'язані з досвідом, складом розуму, швидкістю реакції пілотів і диспетчерів.

На стан повітряного руху істотно впливають запізнювання й помилки в прийнятті рішень диспетчером.

Перераховані чинники впливають також на визначення ширини коридору на трасах, безпечну відстань при організації рівнобіжних трас, організації зональної навігації.

Якість КПР, надійність функціонування системи значною мірою залежать від повноти й достовірності інформаційного забезпечення, а також системи зв'язку. Достовірність первинної інформації, на підставі якої здійснюється керування, є однією з найважливіших умов нормального функціонування системи, оскільки наявність похибок у вихідній інформації може призвести до вироблення неправильних, неточних чи несвоєчасних керувальних впливів.

На повітряний рух впливають і інші чисельні чинники.

Оцінити вплив тих чи тих чинників на функціонування системи КПР, надійність контролю повітряного руху, виявлення й попередження конфліктних ситуацій тощо виконати в реальних системах здебільшого неможливо, оскільки специфіка функціонування систем КПР така, що не дозволяє встановлювати такі режими роботи системи, за яких не забезпечується вимога безпеки польотів, або потребує створення спеціальних ситуацій, що мають малу ймовірність появи, чи потребують великих фінансових витрат.

У цих випадках метод математичного й імітаційного моделювання є ефективним методом дослідження і проектування аеронавігаційних систем і систем КПР.

1.3. Організація моделювання системи керування повітряним рухом

Метод моделювання використовують під час проектування, дослідження й модернізації системи ОрПР та її складових підсистем, коли виникають численні завдання, що потребують оцінювання якісних і кількісних показників, проведення структурного, алгоритмічного і параметричного синтезу системи. При цьому необхідно враховувати складність структури, стохастичність процесів, неоднозначність алгоритмів поводження й прийняття рішень, велику кількість параметрів і змінних, неповноту та стохастичність вихідної інформації, розмаїтість і ймовірнісний характер впливу середовища та ін.

Моделювальні системи широко застосовують також для навчання й тренування диспетчерського складу.

Імітаційне моделювання системи повітряного руху на комп'ютері – трудомісткий специфічний процес, результатом якого є досить складний програмний продукт.

Під час імітаційного моделювання алгоритм, що реалізує модель, відтворює процес функціонування системи в часі, причому імітуються елементарні явища, що складають процес, зі збереженням їх логічної структури і послідовності перебігу в часі, що дозволяє за вихідними даними одержати відомості про стан процесу в певні моменти часу, що дають змогу оцінити характеристики системи.

Загальна методика статистичного моделювання систем містить кілька етапів моделювання.

Перший етап – змістовний опис об'єкта моделювання. Спочатку визначається об'єкт моделювання і склад вихідної інформації. Установлюються граничні значення параметрів функціонування об'єкта, визначаються обмеження, що накладаються. На закінчення ставиться мета моделювання і формулюються критерії ефективності.

На другому етапі формулюється концептуальна модель. На підставі аналізу поставленого завдання моделювання визначається загальний задум, при цьому висуваються гіпотези й припущення. Загальне завдання розбивається на окремі підзадачі і встановлюються пріоритети розв'язання, вибираються параметри і змінні систем, що становлять найбільший інтерес для моделювання, уточнюються критерії ефективності функціонування системи, вибираються способи апроксимації окремих компонентів, визначаються математичні рівняння для опису процесів, що перебігають у системі, а також методи перевірки адекватності розроблених моделей.

На третьому етапі складається формальний опис об'єкта в термінах математичних понять і алгоритмізація функціонування, при цьому використовується апроксимація процесів функціональними залежностями, алгоритмічний опис процесів, комбінований запис у вигляді послідовності формул і алгоритмів. Третій етап найбільш значущий, тому формальний опис обов'язково підлягає перевірці, особливо моменти взаємодії між собою різних компонентів системи.

Четвертий етап передбачає опис імітаційної моделі для її програмної реалізації. При цьому вибираються засоби реалізації моделі й

тип комп'ютера, вирішуються питання декомпозиції об'єкта моделювання, синхронізації окремих компонентів, визначаються початкові умови, а також процедура одержання статистичних даних та їх оброблення. По суті, опис імітаційної моделі являє собою технічне завдання.

На п'ятому етапі здійснюється програмна реалізація моделі. При цьому уточнюються комп'ютери, інші засоби автоматизації процесу моделювання, витрати пам'яті та необхідна швидкодія, а також оцінюються витрати на програмування й налагодження. Належна увага приділяється налагодженню програми й перевірці правильності її виконання. Для цього встановлюється відповідність операцій у програмі й опису моделі, виробляється комплексне налагодження моделі з використанням тестів.

На шостому етапі випробовується модель і досліджуються її властивості. При цьому визначається ступінь адекватності моделі й об'єкта, оцінюються точність імітації явищ, стійкість результатів моделювання, чутливість критеріїв до зміни параметрів моделі.

На сьомому етапі здійснюється власне імітаційне моделювання на комп'ютері. Моделювання починається зі складання плану експерименту. Потім виконуються робочі розрахунки на моделі.

На заключному, восьмому, етапі аналізуються результати моделювання. При цьому надається важливе значення способу інтерпретації результатів у вигляді графіків, таблиць і т. ін. На інтерпретацію результатів відчутно впливають графічні можливості використовуваного комп'ютера.

Що стосується моделювання системи КПР, то організація й складність системи моделювання залежать від поставлених цілей і досліджуваних показників системи. Вибір і обґрунтування узагальнених критеріїв функціонування системи КПР як категорії складних систем становлять значні труднощі. Показниками системи КПР можуть бути: сумарна завантаженість диспетчера; диференціальне навантаження на диспетчера; рівень перевантаження диспетчера; середня кількість керованих літаків; кількість конфліктних ситуацій; складність керування; інтенсивність зміни ешелонів; економічність польотів та ін.

Так, спрощену методику статистичного моделювання у секторі КПР можна подати у вигляді, як показано на рис. 1.1. Склада-

ється програма, що імітує вхідний потік літаків. Генеруються первинні події, пов'язані з проходженням літака через сектор, при цьому події розміщуються у хронологічній послідовності і потім обробляються.

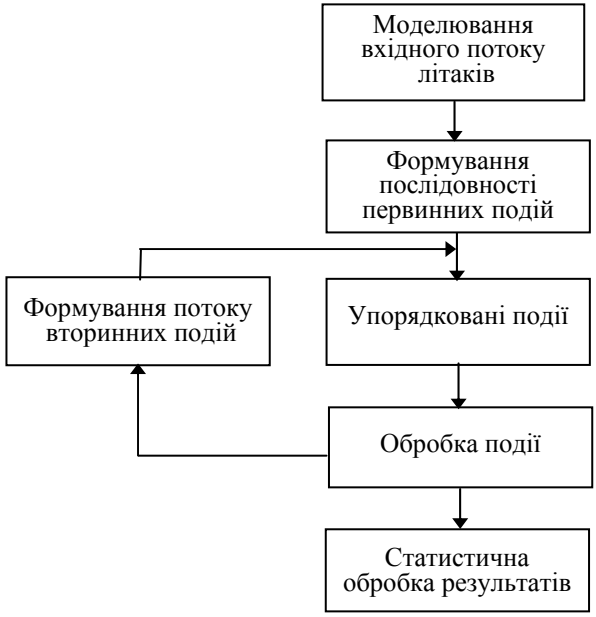

Рис. 1.1. Загальна схема статистичного моделювання подій у секторі КПР

Алгоритм оброблення визначається типом події. Наприклад, це може бути обчислення кількості і тривалості радіорозмов «земля –борт», оцінювання місцеположення літака, прогнозування конфліктних ситуацій, прийняття рішень щодо їх усунення, формування команд керування та ін. У результаті цих дій появляється вторинний потік подій, що упорядковується з урахуванням надходження первинного потоку. Моделювання продовжується доти, доки не вичерпаються всі події або згідно із заданою у програмі ознакою. Усі потрібні результати, одержувані в процесі моделювання, фіксуються.

Наприкінці моделювання виконується статистична обробка числових результатів і визначаються показники модельованої системи.

Функціональна структура моделі має відображати структуру реальної системи КПР, враховувати роботу оперативної системи, розподіл на сектори й взаємозв'язок між ними.

Організаційна складова впливає на підсистему оперативного керування через задання процедур і правил відповідно до нормативних документів.

З огляду на зазначені вище чинники повне й адекватне моделювання системи повітряного руху є надзвичайно складним, а інколи й не виправданим. Для успішного використання теорії моделювання насамперед необхідно чітко визначити мету й завдання моделювання, виконати декомпозицію системи, усвідомити взаємозв'язок процесів, що відбуваються в системі, оцінити достовірність вихідної інформації.

Забезпечити гнучкість варіювання системи моделювання до різних умов організації і функціонування системи КПР можна за рахунок модульності побудови математичного й програмного забезпечення моделювальної системи. Такими основними незалежними модулями можуть бути: підсистема формування й моделювання планів польотів; підсистема виділення планів польотів для окремих структурних компонентів – секторів, району; підсистема імітації повітряного руху; підсистема імітації систем траєкторних вимірювань; підсистема оцінювання траєкторних параметрів; підсистема оцінювання конфліктних ситуацій; підсистема імітації метеорологічних умов; підсистема функціонування системи КПР; підсистема оброблення результатів моделювання. Окремими модулями можуть бути також база даних про льотно-технічні характеристики літаків; база даних про характеристики використовуваного аеронавігаційного устаткування; база даних про структуру повітряного простору з характеристиками трас; база картографічної інформації, а також база даних і знань про технологічні операції під час КПР.

Статистичне моделювання дозволяє оцінити можливі організаційні рішення щодо вдосконалення системи КПР для збільшення пропускної здатності і підвищення ефективності повітряного руху через уведення нових маршрутів, випрямлення трас, уведення «жорстких» траєкторій, спрощення мережі трас, змінювання структури простору (секторизація) і трас, зменшення мінімумів ешелонування, удосконалення технологічних операцій, реорганізацію робочих місць диспетчерів, уведення нових засобів навігації, а також застосування нових методів автоматизації процесів оброблення інформації і керування.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Математичне моделювання з використанням комп'ютера – ефективний спосіб проектування і дослідження систем. Моделювання різних процесів і алгоритмів оброблення інформації дозволяють істотно прискорити процес розроблення систем, програмного забезпечення і підвищити їх якість. Однак успішне вирішення поставлених завдань значною мірою залежить від спроможності використовуваних математичних моделей, від їх здатності подавати нову інформацію про систему в процесі дослідження її моделі й можливості реалізації моделі на комп'ютері. Процес вибору того чи того методу математичного моделювання й побудови математичної моделі системи, що відповідає поставленій задачі, не може бути формалізований і вимагає від розробника творчого підходу і ґрунтовних знань з теорії математичного моделювання.

Система повітряного руху – складна система керування, яка зазнає впливу багатьох чинників, що мають випадкових характер. У цій системі прийняття рішення щодо керування покладається на людину.

Ефективність моделювання значною мірою залежить від ступеня адекватності використовуваних математичних описів (моделей) реальним об'єктам і процесам. У свою чергу це потребує досконалих знань про те, як функціонує система в цілому і її окремі компоненти.

Побудова концептуальних моделей об'єктів, що моделюються, і процесів у системі ОПР часто пов'язана зі складністю формалізації, особливо процесів прийняття рішень. При цьому надмірна складність моделі може суперечити вимозі її реалізовності, особливо щодо моделювання системи реального часу.

Реалізовність цілей моделювання на комп'ютері визначається математичним, програмним, інформаційним і технічним забезпеченням системи моделювання.

Питання для самоперевірки

1. Поясніть ОрПР, її склад, задачі, що розв'язуються.
2. Якими показниками характеризується система ОПР?
3. Чому систему ОПР відносять до категорії складних систем?
4. Наведіть приклади негативного впливу випадкових чинників на функціонування ОПР.
5. Як забезпечується безпека повітряного руху?

6. Доведіть потребу в застосуванні методу моделювання для вирішення завдань КПР.

7. Визначте об'єкти моделювання в системі ОПР.

8. Перелічіть й опишіть основні етапи моделювання.

9. Наведіть проблеми, пов'язані з моделюванням процесів у системі КПР.

10. Які характеристики системи ОПР можна визначити, використовуючи метод моделювання?

11. Які вимоги ставляться до системи моделювання?

2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

Процес функціонування системи *S* у часі *t* описується в загальному вигляді оператором F_S, що перетворює сукупність вхідних впливів $\vec{u}$, зовнішніх впливів середовища $\vec{w}$, внутрішніх параметрів системи $\vec{h}$ у сукупність вихідних характеристик $\vec{y}$ системи :

$$\vec{y}(t) = F_S(\vec{u}, \vec{w}, \vec{h}, t).$$

Для опису процесу функціонування системи використовують два підходи: «вхід – вихід» і «вхід – стан – вихід».

2.1. Опис системи «вхід – вихід»

Описувати систему «вхід – вихід» можна різними способами в явній і неявній формі.

Явна форма зв'язку між вхідним *u(t)* і вихідним *y(t)* сигналами неперервної лінійної динамічної системи *S* (рис. 2.1), яку задано імпульсною перехідною функцією *g(t),* можна подати інтегралом Дюамеля за нульових початкових умов:

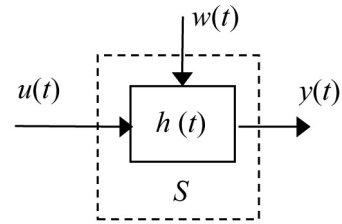

Рис. 2.1. Система «вхід – вихід»

$$y(t) = \int_0^t u(t)g(t - \tau)d\tau.$$

Імпульсна перехідна функція $g(t)$ являє собою реакцію системи на одиночний імпульс $\delta(t)$. Математично дельту-функцію можна записати у вигляді:

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & \text{якщо} \quad t\neq 0;\\ \infty & \text{якщо} \quad t=0\end{cases} \qquad \text{і} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1.$$

В операторній формі зв'язок «вхід–вихід» можна отримати з використанням перетворення Лапласа:

$$Y(p)=W(p)U(p),$$

де $Y(p)=L[y(t)]=\int\limits_{0}^{\infty}y(t)\,e^{-pt}\,dt$ – перетворення Лапласа вхідного сигналу; $p=a+j\omega$ – комплексна змінна; $W(p)$ – передатна функція системи; $U(p)=L[u(t)]$ – перетворення Лапласа вихідного сигналу.

Операторна форма описує систему в частотній області ω. Для визначення вихідного сигналу в часовій області необхідно застосувати обернене перетворення Лапласа:

$$y(t)=L^{-1}[Y(p)]=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{t-j\omega}^{t+j\omega}Y(p)\,e^{pt}\,dp.$$

Неявну форму опису лінійної неперервної динамічної системи в часовій області визначають у вигляді звичайних диференціальних рівнянь. Для одновимірної системи n-го порядку диференціальне рівняння в загальному випадку має вигляд

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=$$
$$=b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{du(t)}{dt}+b_0u(t),$$

якщо $m\le n$, за початкових умов

$$y(0),y'(0),\ldots,y^{(n-1)}(0);\;\; u(0),u'(0),\ldots,u^{(m-1)}(0).$$

За наявності випадкових вхідних сигналів, завад або випадкових змін характеристик системи математична модель «вхід – вихід» стає стохастичною.

2.2. Опис системи «вхід – стан – вихід»

Опис системи «вхід – стан – вихід» (рис. 2.2) виконується після введення поняття стану і простору станів. Стан – це властивість системи в конкретний момент часу. Стан визначають у загальному випадку набором параметрів, які складають вектор станів $\vec{x}(t) = [x_1\ x_2 \dots x_n]^{\mathrm{T}}$, що характеризує стан системи в момент часу t (Т – операція транспонування). Процес функціонування системи розглядають як послідовну зміну станів. Сукупність усіх можливих значень станів називають простором станів.

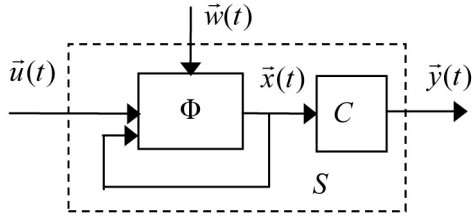

Рис. 2.2. Система «вхід – стан – вихід»

Перехід з одного стану $\vec{x}(t')$ у момент часу t' в інший стан $\vec{x}(t)$ у момент часу t описується оператором переходу $\Phi_{t,t'}$:

$$\vec{x}(t) = \Phi_{t,t'}(\vec{x}(t'), \vec{u}, \vec{w}, t)\ .$$

Значення змінних $\vec{y}(t)$ на виході системи в момент часу t визначають із додаткового рівняння зв'язку «стан – вихід» (рис. 2.2):

$$\vec{y}(t) = C(\vec{x}, t)\ .$$

Для лінійної неперервної динамічної системи зміна стану в неявній формі в часовій області в загальному випадку описується векторно-матричним диференціальним рівнянням першого порядку (рис. 2.3)

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = F\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) + G\vec{w}(t), \qquad (2.1)$$

де $\vec{x}(t)$ – вектор станів розмірності n; F – матриця, що визначає динаміку поводження системи, розмірності $n \times n$; B – матриця, що розподіляє керування $(n \times r)$; $\vec{u}(t)$ – вектор вхідних керувальних сигналів розмірності r; G – матриця, що розподіляє збурення $(n \times s)$; $\vec{w}(t)$ – вектор збурювальних впливів розмірності s.

Зв'язок змінних на виході системи зі станом системи і керуванням встановлюється за допомогою додаткового рівняння зв'язку

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t), \qquad (2.2)$$

де $\vec{y}(t)$ – вектор вихідних (що спостерігаються) сигналів розмірності m; C – матриця спостереження $(m \times n)$; D – матриця наскрізного передавання керування $(m \times r)$.

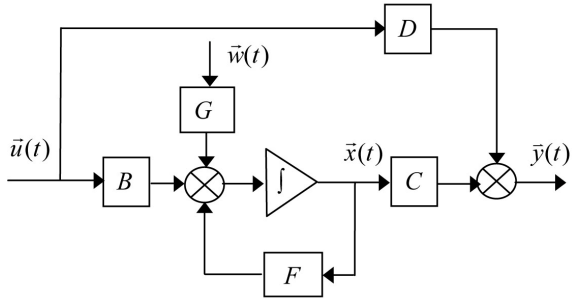

Рис. 2.3. Структурна схема лінійної неперервної динамічної багатовимірної системи

Явну форму запису «вхід – стан – вихід» можна отримати на основі загального розв'язання диференціального рівняння станів (2.1)

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)\vec{u}(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)G(\tau)\vec{w}(\tau)d\tau, \qquad (2.3)$$

де $\Phi(t, \tau)$ – перехідна матриця системи.

Для стаціонарної системи перехідну матрицю можна подати як матричну експоненту $\Phi(t, \tau) = e^{F(t-\tau)}$, що трактується як степеневий ряд

$$e^{Ft} = I + Ft + \frac{1}{2!}F^2t^2 + \frac{1}{3!}F^3t^3 + \ldots,$$

де I – одинична матриця.

Перехідна матриця має такі властивості:

$$\Phi(t_0, t_0) = I; \;\; \Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0);$$

$$\Phi^{-1}(t_1, t_2) = \Phi(t_2, t_1),$$

де t_0, t_1, t_2 – моменти часу, у яких визначено стани $\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2)$ відповідно.

За відсутності керувального і збурювального впливів рівняння (2.3) є розв'язком однорідного диференціального рівняння і визначає вільний рух системи**.**

За наявності випадкових впливів або параметрів система рівнянь (2.1) і (2.2) стає стохастичною.

2.3. Зв'язок описів «вхід – вихід» і «вхід – стан – вихід»

Опис системи «вхід – вихід» з використанням передатної функції приводить до методів аналізу й синтезу в частотній області. Опис системи «вхід – стан – вихід» у просторі станів виконується в часовій області.

За відомою передатною функцією $W(p)$ можна відновити відповідне диференціальне рівняння *n*- го порядку

$$W(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m\text{-}1} p^{m\text{-}1}+\ldots+b_1 p+b_0}{a_n p^n+a_{n\text{-}1} p^{n\text{-}1}+\ldots+a_1 p+a_0}=\frac{B(p)}{A(p)}.$$

Розглянемо випадок, коли $B(p)=b_0$, тобто коли немає похідних вхідного сигналу (передбачається, що чисельник і знаменник поділені на коефіцієнт a_n):

$$\frac{d^n y}{dt^n}=-a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}-\ldots-a_1\frac{dy}{dt}-a_0 y+b_0 u(t).$$

Через заміну змінних

$$y=y_1,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{d\,y_1}{dt}=y_2,\ \ldots\ ,\frac{d^{n\text{-}1}y}{dt^{n-1}}=\frac{d\,y_{n\text{-}1}}{dt}=y_n$$

одержимо систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt}=y_2;\\
&\frac{dy_2}{dt}=y_3;\\
&\ldots\\
&\frac{dy_{n\text{-}1}}{dt}=y_n;\\
&\frac{dy_n}{dt}=-a_0 y_1-a_1 y_2-\ldots-a_{n\text{-}1} y_n+b_0 u
\end{aligned}\qquad (2.4)$$

з початковими умовами $y_1(0),\ y_2(0),\ \ldots,\ y_n(0).$

Сукупність компонентів $\vec{x}(t) = [y_1\ y_2 \dots y_n]^{\mathrm{T}}$ утворює вектор станів у *n*-вимірному просторі станів. Систему рівнянь (2.4) можна записати у векторно-матричній формі в просторі станів $\dot{\vec{x}} = F\vec{x} + B\vec{u}$:

де $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$; $\vec{u} = u.$

2.4. Дискретизація математичних моделей

Потребу в дискретизації зумовлено застосуванням комп'ютерів. Якщо моделювання полягає у визначенні вихідного сигналу системи як розв'язання диференціального рівняння, то імітаційне моделювання з використанням комп'ютера може бути зведено до інтегрування диференціального рівняння числовими методами, що ґрунтуються на побудові різницевої схеми рівняння, яка зв'язує значення змінних у дискретні моменти часу. При цьому можна використати такі методи числового інтегрування, як методи Ейлера, Рунге-Кутта та ін.

Для одержання динамічної моделі «вхід – вихід» з дискретним часом замість диференціального рівняння застосовують лінійне різницеве рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y(i-j) = \sum_{k=0}^{m} b_k u(i-k), \qquad m \le n\ ,$$

де $y(i)$, $u(i)-$ значення вихідного і вхідного сигналів у *i*-й момент дискретизації.

Явна форма запису моделі «вхід – вихід» дискретної системи за нульових початкових умов:

$$y(i) = \sum_{k=0}^{i} u(k) g(i-k),$$

де $g(i)$ – вагова послідовність, що являє собою імпульсну характеристику системи.

Лінійне різницеве рівняння можна перетворити в алгебричне

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

за допомогою Z-перетворення вихідного й вхідного сигналів для дискретних моментів часу:

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y(i) z^{-i}; \qquad U(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i) z^{-i},$$

де z – комплексна змінна; $G(z)$ – дискретна передатна функція.

Розв'язання лінійного різницевого рівняння являє собою рекурсивний процес визначення таких значень за раніше обчисленими

$$y(i) = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{m} b_k u(i-k) - \sum_{j=1}^{n} a_j y(i-j)\right]$$

і є алгоритмом формування дискретних значень вихідного сигналу.

Для системи типу «вхід – стан – вихід» дискретним аналогом неперервної системи (2.1)–(2.2), що описується у просторі станів, буде система (рис. 2.4)

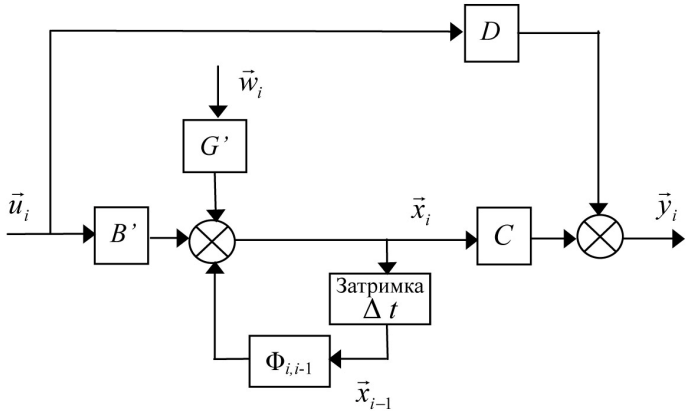

Рис. 2.4. Структурна схема лінійної дискретної багатовимірної системи

$$\begin{aligned} \vec{x}(i) &= \Phi(i, i-1)\vec{x}(i-1) + B'\vec{u}(i-1) + G'\vec{w}(i-1); \\ \vec{y}(i) &= C\vec{x}(i) + D\vec{u}(i), \end{aligned} \tag{2.5}$$

де $\Phi(i, i-1)$ – перехідна матриця системи, а матриці B' і G' визначаються на підставі загального розв'язання неоднорідного

диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами (2.3) у припущенні, що сигнали керування і збурювання зберігають постійне значення на інтервалі часу $t_{i-1} \le t < t_i$ і дорівнюють $u(i-1)$ та $w(i-1)$ відповідно; $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ – крок дискретизації.

У цьому випадку

$$B' = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) B(\tau) d\tau, \qquad G' = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) G(\tau) d\tau .$$

Для стаціонарної системи перехідна матриця може бути визначена з використанням оберненого перетворення Лапласа $\Phi(\tau) = L^{-1}[(pI - F)^{-1}]$.

Приклад 2.1. Задано передатну функцію системи $W(p) = \dfrac{1}{p(p+\alpha)}$. Описати процес на виході системи в просторі станів і виконати дискретизацію.

За визначенням передатна функція $W(p) = \dfrac{y(p)}{u(p)}$, звідси $p^2 y(p) + \alpha p y(p) = u(p)$.

Переходячи від операторної форми запису до диференціального рівняння, знаходимо

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dy(t)}{dt} = u(t) .$$

Позначимо $y = y_1$; $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d y_1}{dt} = y_2$ і одержимо систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2;$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\alpha y_2 + u..$$

Позначимо вектор станів $\vec{x} = [y_1\ y_2]^{\mathrm{T}}$ і запишемо систему рівнянь у векторно-матричному вигляді в просторі станів

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F\vec{x} + Bu,$$

де $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Для дискретизації у вигляді $\vec{x}(i) = \Phi\vec{x}(i-1) + B'\vec{u}(i-1)$ для кроку дискретизації $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ визначимо перехідну матрицю, використовуючи перетворення Лапласа $\Phi(\tau) = L^{-1}[(pI - F)^{-1}]$.

Позначимо матрицю $D = pI - F = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p+\alpha \end{bmatrix}$. Обернену матрицю $D^{-1} = (pI - F)^{-1}$ знаходимо за визначенням

$$D^{-1} = \frac{Ad\,D}{\det D},$$

де $Ad\,D$ – приєднана (союзна) матриця, яку одержуємо транспонуванням матриці, складеної з алгебричних доповнень; $\det D$ – визначник матриці D.

Виконавши необхідні операції, знаходимо

$$D^{-1} = \frac{1}{p(p+\alpha)}\begin{bmatrix} p+\alpha & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p(p+\alpha)} \\ 0 & \frac{1}{p+\alpha} \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до кожного елемента оберненої матриці, остаточно маємо

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\Delta t}) \\ 0 & e^{-\alpha\Delta t} \end{bmatrix}.$$

За умови, що значення вхідного сигналу $u(t_{i-1})$ не змінюється на інтервалі $t_{i-1} \le t < t_i$, знаходимо матрицю

$$B' = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i - \tau) B \, d\tau = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t_i - \tau)}) \\ e^{-\alpha(t_i - \tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha \Delta t}) \\ \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha \Delta t}) \end{bmatrix}.$$

Розкриваючи векторно-матричний запис, одержимо систему рівнянь, що дозволяє моделювати за допомогою комп'ютера процес $y = y_1$:

$$y_1(i) = y_1(i-1) + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha \Delta t}) y_2(i-1) + \frac{1}{\alpha}[\Delta t - \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha \Delta t})] u(i-1);$$

$$y_2(i) = y_2(i-1) e^{-\alpha \Delta t} + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha \Delta t}) u(i-1).$$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

В основу моделювання покладено теорію подібності. Математичне моделювання – процес установлення відповідності реальному об'єкту деякого математичного об'єкта, який називається математичною моделлю.

Математичне моделювання поділяють на аналітичне, імітаційне та комбіноване.

Аналітичне моделювання полягає в тому, що процес функціонування записується у вигляді функціональних співвідношень (алгебричних, диференціальних, інтегральних, кінцево-різницевих та ін.) чи логічних умов. Аналітичну модель можна дослідити такими методами:

– аналітичними, коли прагнуть одержати в загальному вигляді явні залежності для шуканих характеристик;

– числовими, коли не вміючи розв'язувати рівняння в загальному вигляді, прагнуть одержати числові результати для конкретних початкових даних;

– якісними, коли не маючи розв'язку в явному вигляді, можна знайти деякі властивості розв'язання, наприклад усталеність.

Моделюючи об'єкти, розрізняють таки типові математичні схеми:

- диференціальні рівняння;
- кінцеві та ймовірнісні автомати;
- системи масового обслуговування.

Імітаційне моделювання полягає в тому, що відтворюється процес функціонування системи за складеним алгоритмом у часі, при цьому імітуються окремі явища, що становлять процес зі збереженням їх логічної структури і послідовності перебігу в часі.

Залежно від характеру розглянутих процесів у системі ОПР усі види моделювання можна поділити на детерміновані й стохастичні; статичні та динамічні; дискретні, неперервні та дискретно-неперервні.

Основна проблема розроблення математичних моделей полягає у побудові моделей з достатнім ступенем адекватності, що описують досліджувані процеси і системи, як необхідної умови одержання правдоподібних і достовірних результатів моделювання.

Питання для самоперевірки

1. Які способи математичного опису систем і процесів ви знаєте?
2. Наведіть класифікацію схем і видів моделювання.
3. Чим розрізняються явна й неявна форми опису?
4. Поясніть поняття «простір станів».
5. Що таке перехідна матриця, які її властивості?
6. У чому принципова розбіжність між описами систем типу «вхід – вихід» і «вхід – стан – вихід»?
7. Покажіть зв'язок опису об'єкта (процесу) типу «вхід – вихід» і «вхід – стан – вихід».
8. Чим зумовлено потребу опису процесів і систем у дискретному вигляді?

3. МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

Для моделювання стохастичних процесів та систем із використанням комп'ютерів використовують алгоритмічний (програмний) засіб отримання випадкових чисел. Програмна імітація випадкових впливів будь-якої складності зводиться до генерації деякої стандартної (базової) послідовності з наступним її функціональним перетворенням. У разі дискретного моделювання як базову послідовність беруть послідовність $\{x_i\} = x_0, x_1, \cdots, x_n$, яка являє собою реалізацію незалежних, рівномірно розподілених на інтервалі від 0 до 1 випадкових чисел $\{r_i\} = r_0, r_1, \cdots, r_n$.

У системах програмування зазвичай існують стандартні підпрограми – так звані датчики випадкових чисел, які дозволяють сформувати стандартну (базову) псевдовипадкову послідовність, а також підпрограми, що формують послідовності з іншими законами розподілення.

3.1. Моделювання випадкових подій

Для простої випадкової події A, заданої імовірністю її появи P_A, моделювання виконують так. Подію зіставляють із базовою випадковою послідовністю x_i, що імітує рівномірний розподіл $f(x)$ на інтервалі (0,1). При цьому подію A визначають як подію, яка за обраного значення x_i випадкової величини задовольняє нерівність

$$x_i \le P_A. \tag{3.1}$$

У цьому випадку імовірність події

$$P(x_i \le P_A) = \int_0^{P_A} f(x)dx = \int_0^{P_A} dx = P_A.$$

Протилежна подія $\overline{A}$ полягає в тому, що $x_i > P_A$.

Процедура моделювання передбачає вибір значень x_i та порівняння їх з P_A. Подія є закінченням випробування, якщо умова (3.1) виконується.

Приклад 3.1. Скласти схему алгоритму моделювання простої випадкової події A, заданої імовірністю появи P_A, для N випробувань.

Для реалізації алгоритму використаємо підпрограму (функцію $RAND$) формування випадкових чисел з рівномірним законом розподілу на інтервалі (0,1).

Відповідно до схеми алгоритму (рис. 3.1) спочатку задаємо значення імовірності появи події P_A. Потім виконуємо звертання до підпрограми $RAND$, що видає випадкове число.

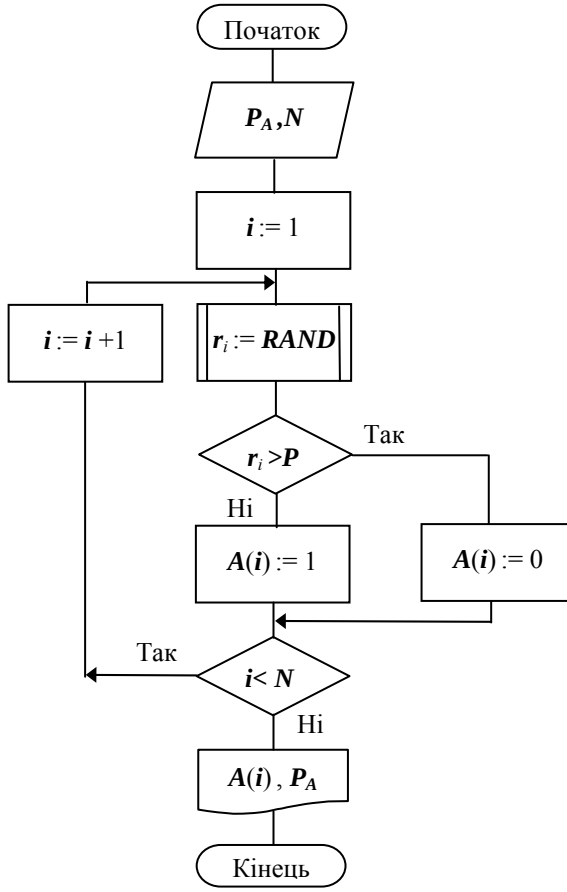

Рис. 3.1. Алгоритм моделювання
простої випадкової події

Це число порівнюємо із заданою імовірністю.

Якщо подія A в i-му випробуванні відбулася ($r_i \le P_A$), то i-й елемент масиву $A(i)$ набуває значення 1, якщо ні – 0.

Для моделювання повної групи подій $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, A_k$, що настають з імовірностями $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots, P_k$ за умови, що $P(A_i A_j) = 0$ і $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$, можна використати аналогічний підхід. При цьому A_m визначаємо як подію, яка полягає у тому, що обране значення x_i випадкової величини задовольняє нерівність

$$l_{m-1} < x_i \le l_m, \tag{3.2}$$

де $l_m = \sum_{i=1}^{m} P_i$.

У цьому випадку ймовірність події A_m дорівнює

$$P_{A_m} = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = P_m, \text{ оскільки } \quad l_m - l_{m-1} = P_m.$$

Процедура моделювання передбачає послідовне порівняння випадкових чисел r_i зі значенням P_m і P_{m-1}. Подія A_m є закінченням випробування, якщо умова (3.2) виконується.

Моделювання складних подій, які залежать від двох і більше (наприклад, m) простих сукупних залежних подій, можна виконувати двома способами. Перший спосіб полягає в послідовній перевірці умови (3.1) для m простих подій, що відповідає m випадковим числам, другий – у перевірці умови (3.2) для визначення одного з можливих наслідків.

У разі моделювання сумісних незалежних подій, наприклад A і B, які мають імовірності появи P_A і P_B, можливими наслідками сумісних випробувань будуть чотири події:

$A B$ (A і B), $\quad \overline{A} B$ (ні A і B),
$A \overline{B}$ (A і ні B), $\quad \overline{A}\,\overline{B}$ (ні A і ні B)

з імовірностями

$$P_A P_B, \quad (1 - P_A) P_B, \quad P_A (1 - P_B), \quad (1 - P_A)(1 - P_B).$$

За такої постановки задача моделювання зводиться до перевірки

умови (3.2).

Моделювання сумісних залежних подій, наприклад, A і B, які мають імовірності настання P_A і P_B, полягає в такому. Вважають, що одна з умовних імовірностей, наприклад умовна ймовірність $P(B/A)$ настання події B, за умови, що подія A трапилася, було задано. Визначають імовірність можливих подій AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\overline{B}$. Ураховуючи, що вказані події утворюють повну групу подій, тобто

$$P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(\overline{A}\overline{B}) = 1,$$

отримуємо:

$$P(AB) = P(A)P(B/A);$$

$$P(A\overline{B}) = P(A)[1 - P(B/A)];$$

$$P(\overline{A}B) = [1 - P(A)]P(B/\overline{A});$$

$$P(\overline{A}\overline{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B/\overline{A})].$$

Отже, задача моделювання зводиться до другого способу через порівняння умови (3.2).

3.2. Моделювання випадкових величин

Для дискретної випадкової величини x_i за умови $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$ задача зводиться до моделювання повної групи подій.

Для неперервної випадкової величини x вичерпною характеристикою є функція розподілу $F(x) = P(x < X)$ – імовірностей того, що x набуває значення, меншого за X.

Імовірність попадання випадкової величини на задану ділянку з межами a, b визначають за заданою функцією розподілу виразом $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$, а за заданою щільністю розподілу $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ – виразом $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Моделювання неперервної випадкової величини, заданої щільністю розподілу $f(x)$, можна виконати за допомогою граничних теорем, методу обернених функцій, методу кускової апроксимації та інших методів.

Суть методу граничних теорем полягає в тому, що при моде-

люванні відтворюються умови, за яких для заданого закону розподілу стають справедливими граничні теореми теорії ймовірностей. Так, моделювання випадкової величини з нормальним законом розподілу може бути виконано на основі центральної граничної теореми, згідно з якою сума достатньо великої кількості незалежних однаково розподілених випадкових величин має асимптотичний нормальний розподіл.

Приклад 3.2. Скласти вираз для імітації випадкової величини x з нормальним законом розподілу.

Якщо взяти n значень рівномірно розподіленої на інтервалі (0,1) послідовності з математичним сподіванням $m_r = 1/2$ та дисперсією $D_r = 1/12$, яка генерується датчиком випадкових чисел на комп'ютері, і потім взяти її суму, то отримаємо одне значення нормально розподіленої випадкової величини $x' = \sum_{i=1}^{n} r_i$ з математичним сподіванням $m_{x'} = n/2$ та середньоквадратичним відхиленням $\sigma_{x'} = \sqrt{n/12}$. Якщо взяти n =12 і відняти від суми число 6, то отримаємо зручну для подальшого використання нормовану нормально розподілену випадкову величину $x = x' - 6$ з математичним сподіванням $m_x = 0$ та середньоквадратичним відхиленням $\sigma_x = 1$.

Метод обернених функцій ґрунтується на наявності однозначного зв'язку між рівномірно розподіленою на інтервалі (0,1) випадковою величиною r і випадковою величиною x із заданою щільністю розподілу $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i \ . \tag{3.3}$$

Щоб отримати число, яке належить послідовності випадкових чисел $\{x\}$ із заданою щільністю розподілу $f(x)$, необхідно розв'язати рівняння (3.3) відносно x_i і отримати вираз, який перетворює рівномірно розподілену величину у випадкову величину із необхідною щільністю розподілу.

Приклад 3.3. Скласти вираз для моделювання рівномірно

розподіленої на інтервалі (a,b) випадкової величини, яка має щільність розподілу $f(x)=1/(b-a)$.

Використовуючи співвідношення (3.3), маємо

$$\int_{-\infty}^{x_i}\frac{1}{b-a}dx=\int_{a}^{x_i}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x_i-a}{b-a}=r_i\ .$$

Звідси знаходимо явний вираз для формування випадкового числа з необхідним розподіленням $x_i=a+(b-a)r_i$, де r_i – випадкове число, отримане від датчика випадкових чисел, рівномірно розподілених на інтервалі (0,1).

Метод кускової апроксимації грунтується на заміні щільності розподілу $f(x)$ кусково-постійною функцією на заданому інтервалі (a,b). Інтервал розбивають на *m* підінтервалів. При цьому припускають, що на кожному підінтервалі $f(x)$ постійна. Випадкову величину записують у вигляді $x=a_k+x'_k$, де a_k- абсциса лівої границі *k*-го підінтервалу. Для спрощення інтервал розбивають так, щоб імовірність влучення випадкової величини в будь-який підінтервал (a_k, a_{k+1}) була б постійною

$$P_k=\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(x)dx=\frac{1}{m}.$$

Звідси знаходять границі підінтервалів a_k.

Процедура моделювання складається з таких дій. Генерують випадкове число r_i, рівномірно розподілене на інтервалі (0, 1). За значенням цього числа визначають підінтервал, а отже, і ліву границю a_k. Генерують наступне число r_{i+1}, яке масштабують множенням на $(a_{k+1}-a_k)$, і розраховують випадкове число $x_i=a_k+(a_{k+1}-a_k)r_{i+1}$. Процедуру повторюють для розрахунку наступного випадкового числа x_{i+1}.

3.3. Моделювання випадкових процесів

Випадковий процес є випадковою функцією часу $y(t)$, яка за кожного значення аргументу буде випадковою величиною. Якщо фіксувати момент часу $t = t'$, то $y(t')$ – випадкова величина, яка повністю характеризується своїм законом розподілу.

Для формування випадкових процесів на практиці широко використовують кореляційну теорію. Часто досліджувані процеси підкоряються нормальному закону розподілу. Відомо, що випадкова функція $y(t)$ із гауссовим (нормальним) розподілом повністю характеризується моментом першого порядку, тобто математичним сподіванням $m_y(t) = M[y(t)]$, та моментом другого порядку центрованої випадкової функції, тобто кореляційною функцією

$$K_y(t,t') = M\{[y(t) - m_y(t)][y(t') - m_y(t')]\},$$

яка для стаціонарних процесів залежить тільки від різниці моментів часу $\tau = t' - t$ і має вигляд

$$K_y(\tau) = M\{[y(t) - m_y][y(t+\tau) - m_y]\}.$$

Кореляційна функція визначає зв'язок процесу в часі. Якщо $\tau = 0$, кореляційна функція дорівнює дисперсії $K_y(0) = D_y$.

Кореляційна функція зв'язана зі спектральною щільністю $S_y(\omega)$ прямим і оберненим перетвореннями Фур'є:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \qquad (3.4)$$

$$K_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Фізичний зміст спектральної швидкості полягає в тому, що вона описує розподілення сигналу по частотному спектру ω. У разі використання формули Ейлера $e^{-j\omega\tau} = \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau$ пряме перетворення Фур'є (3.4) можна записати у вигляді

$$S_y(\omega) = 2\int_0^{\infty} K_y(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Формувальний фільтр. Практична значущість спектральної щільності полягає у можливості формування випадкового процесу із заданими характеристиками. При цьому використовують властивості лінійної системи й поняття формувального фільтра.

Спектральна щільність S_y випадкового процесу y на виході стійкої лінійної системи з передатною функцією $W(j\omega)$ зв'язана зі спектральною щільністю S_w випадкового процесу w на вході співвідношенням

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_w(\omega) . \qquad (3.5)$$

Важливе значення має поняття формувального фільтра (рис.3.2), яке випливає зі співвідношення (3.5). Якщо на вхід лінійної системи подати випадковий сигнал $w(t) = q(t)$ з одиничною спектральною щільністю $S_q(\omega) = 1$ – білий шум, то на виході системи буде формуватися випадковий процес із заданою спектральною щільністю, яка визначається передатною функцією формувального фільтра:

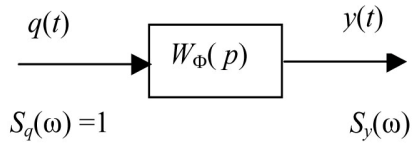

Рис. 3.2. Формувальний фільтр

$$S_y(\omega) = \left|W_\Phi(j\omega)\right|^2 \cdot 1 . \qquad (3.6)$$

Випадковий процес $q(t)$ типу «білий шум» – це абсолютно випадковий процес, коли немає кореляції між наступними його значеннями. Кореляційна функція такого процесу має вигляд

$$K_q(\tau) = \sigma_q^2 \delta(\tau) ,$$

де σ_q^2 – інтенсивність білого шуму; δ – дельта-функція.

Відзначимо ще одну важливу якість δ-функції. Нехай $f(t)$ – деяка неперервна функція, тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) . \qquad (3.7)$$

Приклад 3.4. Визначити спектральну щільність білого шуму, заданого кореляційною функцією $K_q(\tau) = \sigma_q^2 \delta(\tau)$.

Згідно з перетворенням (3.4)

$$S_q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_q^2 \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau .$$

Поклавши $f(\tau) = \sigma_q^2 e^{-j\omega\tau}$ і використовуючи властивість (3.7) для $t_0 = 0$, отримаємо $S_q(\omega) = \sigma_q^2$.

Передатну функцію формувального фільтра W_Φ визначають за заданою спектральною щільністю таким чином. Якщо вираз для спектральної щільності є дробово-раціональною функцією, то її можна подати у вигляді добутку двох комплексно-спряжених функцій

$$S_y(\omega) = \Psi(j\omega)\overline{\Psi(j\omega)} = \left|\Psi(j\omega)\right|^2 , \qquad (3.8)$$

де функція $\Psi(j\omega)$ має таку властивість, що всі її нулі та полюси розміщені на площині комплексної змінної p (у разі заміни $j\omega$ на p) лівіше наявної осі. Перетворення (3.8) називають факторизацією спектральної щільності, а функцію $\Psi(j\omega)$ згідно з виразами (3.6) та (3.8) – передатною функцією формувального фільтра, тобто $W_\Phi(j\omega) = \Psi(j\omega)$. Ця вимога розміщення нулів та полюсів випливає із вимоги усталеності фільтра.

Таким чином, процедура підготовки для моделювання на комп'ютері стохастичного процесу, заданого кореляційною функцією, полягає у такому.

За заданої кореляційної функції $K_y(\tau)$ визначаємо спектральну щільність $S_y(\omega)$. Для цього зазвичай використовують таблицю перетворень Фур'є.

Виконуємо факторизацію спектральної щільності і визначаємо передатну функцію формувального фільтра W_Φ.

Записуємо диференціальне рівняння, що описує шуканий процес на виході формувального фільтра, за знайденою передатною функцією: $W_\Phi(j\omega) = \dfrac{Y(p)}{Q(p)}$.

Отримане диференціальне рівняння n-го порядку записуємо у просторі станів у вигляді рівняння (2.1), тобто $\dot{\vec{x}} = F\vec{x} + G\vec{w}$, якщо $\vec{w} = q$.

Виконуємо дискретизацію (2.5):

$$\vec{x}(i) = \Phi(i, i-1)\vec{x}(i-1) + G'q(i-1).$$

Складаємо алгоритм і програму розв'язання отриманої дискретної системи рівнянь, яка описує зміну стану модельованого процесу.

Складаємо програму імітації випадкової послідовності $\{q_i\}$ типу «білий шум» (для цього зазвичай використовують стандартну програму генерації такої послідовності).

Задаймо початкові умови і розв'яжемо задачу на комп'ютері.

Виконуємо статистичну обробку і аналіз результату.

Приклад 3.5. Скласти математичну модель випадкового процесу $y(t)$, що заданий кореляційною функцією $K_y(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, і подати у вигляді, що дозволяє виконати його моделювання на комп'ютері.

Заданій кореляційній функції відповідає спектральна щільність $S_y(\omega) = \dfrac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}$.

Використовуючи ідею формувального фільтра, виконаємо факторизацію спектральної щільності (3.8), ураховуючи, що $(j\omega)^2 = -\omega^2$:

$$S_y(\omega) = \Psi(j\omega)\overline{\Psi(j\omega)} = \frac{\sigma\sqrt{2\alpha}}{(\alpha + j\omega)} \frac{\sigma\sqrt{2\alpha}}{(\alpha - j\omega)}.$$

Передатна функція формувального фільтра має вигляд

$$W_\Phi(j\omega) = \Psi(j\omega) = \frac{\sigma\sqrt{2\alpha}}{\alpha + j\omega}.$$

Оскільки

$$W_\Phi(j\omega) = \frac{y(p)}{q(p)},$$

де $q(t)$ – білий шум з одиничною спектральною щільністю, звідси $p\,y(p) + \alpha\,y(p) = \sigma\sqrt{2\alpha}\,q(p)$.

Цьому виразу відповідає диференціальне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\alpha\, y(t) + \sigma\sqrt{2\alpha}\; q(t)\,.$$

Для реалізації процесу $y(t)$ на комп'ютері використаємо перетворення Лапласа для визначення перехідної матриці, яка в цьому прикладі стає скалярною функцією:

$$\Phi = L^{-1}\left[(pI - F)^{-1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{p+\alpha}\right] = e^{-\alpha t}\,.$$

Тепер запишемо розв'язання диференціального рівняння у рекурентному вигляді (2.3):

$$y(i) = e^{-\alpha\Delta t}\, y(i-1) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\alpha(t_i-\tau)}\sigma\sqrt{2\alpha}\; q(\tau)d\tau\;.$$

Якщо припустити, що на інтервалі $t_{i-1} \le t < t_i$ збурювання $q(t_{i-1}) = \text{const}$, тоді остаточно

$$y(i) = e^{-\alpha\Delta t}\, y(i-1) + \sigma\sqrt{2/\alpha}\;\left[1 - e^{-\alpha\Delta t}\right] q(i-1)\,.$$

Для моделювання випадкового дискретного процесу $y(i)$ необхідно мати підпрограму формування дискретного білого шуму $q(i)$.

Алгоритм ковзного підсумовування. Для моделювання стаціонарних випадкових процесів з нормальним законом розподілу для найбільш поширених кореляційних функцій розроблено алгоритм, в основу якого покладено лінійне перетворення стаціонарної послідовності q_i незалежних нормальних випадкових чисел – дискретний білий шум з параметрами $m_q = 0$, $\sigma_q = 1$ – у послідовність, корельовану за заданим законом. Можливість такого перетворення випливає із властивостей формувального фільтра. Оператор лінійного перетворення записують у вигляді ковзного підсумовування з деякою вагою c_j:

$$y(i) = \sum_{j=0}^{n} c_j\, q(i-j)\,,$$

або рекурентним рівнянням вигляду

$$y(i) = a_0 q(i) + a_1 q(i-1) + \ldots + a_n q(i-n) + \\ + b_1 y(i-1) + b_2 y(i-2) + \ldots + b_m y(i-m) = \\ = \sum_{j=0}^{n} a_j q(i-j) + \sum_{j=1}^{m} b_j q(i-j), \qquad (3.9)$$

де a, b, n, m – параметри, що визначаються типом заданої кореляційної функції.

Початкові умови при розрахунку перших значень процесу можна обрати рівними нулю або будь-яким значенням із $\{q_i\}$.

Нижче наведено вирази для визначення коефіцієнтів ковзного підсумовування для алгоритму моделювання випадкових процесів з найбільш використовуваними кореляційними функціями:

1. Кореляційна функція $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$:

$$a_0 = \sigma\sqrt{1-p_2}; \quad b_1 = p, \quad \text{де} \quad p = e^{-\gamma_1}; \ \gamma_1 = \alpha\Delta t.$$

2. Кореляційна функція $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau$:

$$a_0 = \sigma\beta_0 = \sigma\sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}; \quad a_1 = \frac{\sigma\alpha_0}{\beta_0};$$

$$b_1 = 2p\cos\gamma_0; \ b_2 = -p^2,$$

де $\alpha_0 = p(p^2-1)\cos\gamma_0; \ \alpha_1 = 1-p^4; \quad p = e^{-\gamma_1}; \ \gamma_1 = \alpha\Delta t; \ \gamma_0 = \omega_0\Delta t$.

3. Кореляційна функція $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)$:

$$a_0 = \sigma\beta_0 = \sigma\sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}; \quad a_1 = \frac{\sigma\alpha_0}{\beta_0};$$

$$b_1 = 2p\cos\gamma_0; \ b_2 = -p^2,$$

де $\alpha_0 = p(p^2-1)\cos\gamma_0 + \frac{\alpha}{\omega_0}(1+p^2)p\sin\gamma_0;$

$$\alpha_1 = 1 - p^4 - 4p^2\frac{\alpha}{\omega_0}\sin\gamma_0\cos\gamma_0; \ \ p = e^{-\gamma_1}; \ \gamma_1 = \alpha\Delta t; \ \gamma_0 = \omega_0\Delta t.$$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Виконуючи статистичне моделювання системи ОПР і її компонентів, важливо враховувати і моделювати різного виду випадкові чинники.

Імітувати випадкові впливи будь-якої складності можна на основі стандартної (базової) псевдовипадкової послідовності, що являє собою реалізацію незалежних, рівномірно розподілених на інтервалі від нуля до одиниці чисел, із її наступним функціональним перетворенням. На комп'ютері базова послідовність формується стандартними підпрограмами – датчиками (генераторами) випадкових чисел.

Моделювання випадкової події полягає в тому, що задане значення ймовірності події порівнюється зі значенням базової випадкової послідовності.

Якщо випадкову величину задано щільністю розподілу, то її моделювання можна виконати з використанням граничних теорем, методів обернених функцій, кускової апроксимації, або вже існуючої підпрограми (функції).

Для моделювання випадкових процесів застосовують кореляційну теорію та ідею формувального фільтра, що перетворює базову послідовність у послідовність із заданою кореляційною функцією.

Питання для самоперевірки

1. Що є базовою послідовністю для алгоритмічного способу одержання випадкових чисел, що підкоряються різним законам розподілу?
2. Які стандартні підпрограми випадкових чисел використовують для комп'ютерного моделювання?
3. У чому полягає ідея імітації випадкових подій для моделювання на комп'ютері?
4. Які методи моделювання випадкових величин із заданим законом розподілу ви знаєте?
5. Що таке випадковий процес типу «білий шум», які його властивості?
6. У чому полягає ідея формувального фільтра?
7. Наведіть етапи підготовки до моделювання випадкового процесу, заданого спектральною щільністю.

4. ОБРОБЛЕННЯ І АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ МОДЕЛЮВАННЯ

Заключним етапом моделювання на комп'ютері є організація ефективного оброблення і подання результатів.

До якості оцінок, отриманих за допомогою статистичної обробки результатів моделювання, ставлять таки вимоги:

– незсуненість оцінки – рівність математичного сподівання оцінки параметру, що визначається, тобто $M[\hat{x}] = x$, де x – шуканий параметр; $\hat{x}$ – оцінка параметра;

– ефективність оцінки – мінімальність середнього квадрата похибки оцінки, тобто $M[(\hat{x} - x)^2] \le M[(\hat{x}' - x)^2]$, де $\hat{x}$ – розглянута оцінка; $\hat{x}'$ – будь-яка інша оцінка;

– обґрунтованість оцінки – збіжність за ймовірністю, якщо $N \to \infty$, до оцінюваного параметра, тобто $\lim\limits_{N\to\infty} P\{|\hat{x} - x| \ge \varepsilon\} = 0$, якщо $\varepsilon > 0$ чи $\lim\limits_{N\to\infty} M\{(\hat{x} - x)^2\} = 0$.

На практиці не завжди вдається задовольнити всі ці вимоги одночасно.

У разі великого обсягу інформації бажано так організувати обробку результатів, щоб оцінки формувалися по ходу моделювання без запам'ятовування всієї інформації про стан процесу функціонування, тобто рекурентно.

4.1. Оцінювання ймовірності випадкової події

Таку оцінку виконують за частотою настання події A, тобто

$$\hat{P}(A) = \frac{N_A}{N},$$

де N_A – кількість випадків настання події A; N – кількість спроб (реалізацій).

Оцінка є обґрунтованою, ефективною і незсувною.

4.2. Оцінювання характеристик випадкової величини

Щоб оцінити ймовірність можливих значень випадкової величини, тобто закон розподілу, область можливих значень випадкової величини x розбивають на n інтервалів (рис. 4.1).

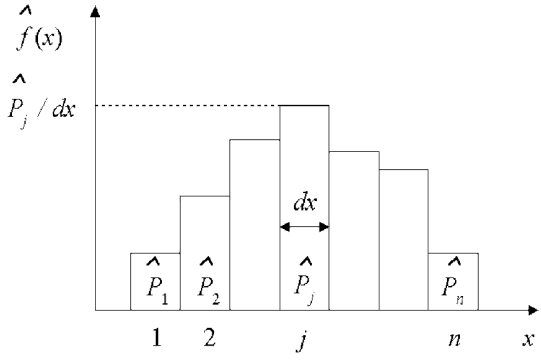

Рис. 4.1. Гистограма

Потім підсумовують кількість улучень випадкової величини в ці інтервали N_j. Оцінку для ймовірності влучення випадкової величини в j-й інтервал визначають як частоту влучень у цей інтервал $\hat{P}_j = \frac{N_j}{N}$. За цими значеннями можна побудувати гістограму. На кожному j-му інтервалі (розряді) як підставі будують прямокутник, площа якого дорівнює $\hat{P}_j$, так, щоб площа, обмежена гістограмою, дорівнювала одиниці.

Як оцінку математичного сподівання використовують вибіркове середнє

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ .$$

Така оцінка є незсувною, обґрунтованою й ефективною.

Незсувна оцінка дисперсії:

$$\hat{D}_x = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{m}_x)^2 \ .$$

Однак ця формула потребує запам'ятовування всіх N значень x_i, тому що $\hat{m}_x$ змінюється в процесі підсумовування x_i.

Раціональніше використовувати формулу

$$\hat{D}_x = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right],$$

яка випливає з відомого співвідношення $D_x = M[x^2] - m_x^2$.

Для двох випадкових величин x і y міру їх взаємозв'язку встановлюють кореляційним моментом

$$K_{xy} = M[(x - m_x)(y - m_y)] \ .$$

Оцінку кореляційного моменту двох випадкових величин з можливими значеннями x_i, y_i виконують за формулою

$$\hat{K}_{xy} = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{m}_x)(y_i - \hat{m}_y)\right]$$

чи з використанням більш економної процедури:

$$\hat{K}_{xy} = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i\right].$$

4.3. Оцінювання характеристик випадкового процесу

Шуканими характеристиками є математичне сподівання і кореляційна функція випадкового процесу. Оцінку отримують на заданому інтервалі часу $(0, T)$. Для цього часовий інтервал розбивають на відрізки з кроком Δt і визначають значення k-го процесу $y_k(t)$ для фіксованих моментів часу $t = t_i = i\,\Delta t$, де k – номер реалізації процесу; i – номер часового відрізка.

Оцінку математичного сподівання визначають усередненням у фіксованих часових перетинах:

$$\hat{m}_y(t_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k(t_i),$$

де t_i фіксують для кожного підсумовування; N – кількість реалізацій.

Таким чином, у загальному випадку оцінка математичного сподівання може набувати різних значень для різних моментів часу.

Оцінку кореляційної функції визначають за виразом

$$\hat{K}_y(t_r, t_j) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left[y_k(t_r) - \hat{m}_y(t_r)\right]\left[y_k(t_j) - \hat{m}_y(t_j)\right],$$

де t_r і t_j перебігають усі значення моментів часу t_i.

Можна використовувати більш економний в обчислювальному сенсі вираз

$$\hat{K}_y(t_r, t_j) = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{k=1}^{N} y_k(t_r) y_k(t_j) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k(t_r)\sum_{k=1}^{N} y_k(t_j)\right].$$

Статистичну оцінку характеристик стаціонарних випадкових процесів, що мають властивість ергодичності, виконують з урахуванням цієї властивості. Для ергодичного процесу середнє за часом дорівнює середньому за множиною, і, отже, для оцінки шуканих характеристик досить мати одну тривалу реалізацію процесу.

Оцінкою математичного сподівання і кореляційної функції будуть відповідно:

$$\hat{m}_y = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt;$$

$$\hat{K}_y(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} y(t)y(t+\tau)dt - \hat{m}_y^2,$$

де $\tau = t - t'$.

На практиці інтервал часу $(0,T)$ обмежений, а значення функції фіксують для кінцевого набору моментів часу t_i. Таким чином, оцінку математичного сподівання й оцінку кореляційної функції визначають за формулами:

$$\hat{m}_y = \frac{\Delta t}{T}\sum_{i=1}^{T/\Delta t} y(t_i);$$

$$\hat{K}_y(\tau) = \frac{\Delta t}{T-\tau}\sum_{i=1}^{(T-\tau)/\Delta t} y(t_i)y(t_i+\tau) - \hat{m}_y^2,$$

де $T/\Delta t$ – кількість відрізків на інтервалі $(0,T)$; $\tau = r\Delta t$, якщо $r = 0, 1 \ldots m$.

Приклад 4.1. Скласти рекурентний вираз для обчислення

середнього значення випадкової послідовності x_i.

Середнє значення є оцінкою математичного сподівання і за визначенням дорівнює $\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$. Запишемо суму як

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i + x_N\right) = \frac{N-1}{N}\ \hat{m}_{x\,(N-1)} + \frac{1}{N}x_N =$$

$$= \hat{m}_{x\,(N-1)} + \frac{1}{N}\left[x_N - \hat{m}_{x\,(N-1)}\right].$$

Цей вираз дозволяє уточнювати оцінку середнього значення з надходженням нових значень послідовності без повторного підсумовування і запам'ятовування усіх раніше отриманих даних.

4.4. Інтервальна оцінка

Інтервальну оцінку застосовують в тому разі, коли потрібно знайти не тільки точкову оцінку параметра, але й оцінити його точність і вірогідність. Інтервальною оцінкою якогось параметра *a* вважається інтервал $[\hat{a}-\varepsilon, \hat{a}+\varepsilon]$, границі якого є функціями вибіркових значень і який із заданою довірчою ймовірністю γ покриває оцінюваний параметр, тобто

$$P\{\hat{a}-\varepsilon < a < \hat{a}+\varepsilon\} = \gamma,$$

де $\hat{a}$ – незсувна оцінка; ε – додатне число.

Точність інтервальної оцінки визначають шириною довірчого інтервалу ε, вірогідність – довірчою ймовірністю γ.

4.5. Перевірка статистичних гіпотез

У процесі оброблення результатів статистичного моделювання часто виникає задача визначення емпіричного закону розподілу випадкової величини. Для її розв'язання за результатами моделювання знаходять значення вибіркового закону розподілу $\hat{F}(x)$ (чи

функції щільності $\hat{f}(x)$) і висувають гіпотезу H_0 про те, що емпіричний розподіл узгоджується з відомим теоретичним розподілом $F(x)$. Далі цю гіпотезу перевіряють за допомогою статистичних критеріїв згоди таких, як критерії згоди Колмогорова, Пірсона, Смірнова та ін.

Для перевірки гіпотези H_0 вибирають деяку випадкову величину U, що характеризує ступінь розбіжності теоретичного й емпіричного розподілу.

Критерій згоди Пірсона ґрунтується на визначенні як міри розбіжності теоретичного й емпіричного розподілів величини

$$U = \sum_{j=1}^{n} c_j (\hat{P}_j - P_j)^2 ,$$

де n – кількість підінтервалів, на які розбивається інтервал значень величини x; $c_j = \frac{N}{P_j}$; N – кількість реалізацій випадкової величини x; $\hat{P}_j$ – оцінка ймовірності; P_j – імовірність улучення випадкової величини в j-й підінтервал, обчислена з теоретичного розподілу.

Якщо $N \to \infty$, закон розподілу сформованої випадкової величини U майже не залежить від функції розподілу $F(x)$ і від N, а залежить тільки від кількості підінтервалів n і наближається до закону розподілу χ^2 (хі-квадрат), тобто $U = \chi^2$ із $(n - r - 1)$ степенями вільності, де r – число параметрів теоретичного закону розподілу (наприклад, для нормального закону $r = 2$ – це математичне сподівання та дисперсія).

Функція розподілу $F(\chi^2_{\text{T}}) = P\{\chi^2 \le \chi^2_{\text{T}}\}$ для χ^2 табульована.

Процедура перевірки складається з таких етапів:

1) розбивають область значень величини x на n підінтервалів;

2) визначають частоту влучень значень величини x у j-й підінтервал $\hat{P}_j = \frac{N_j}{N}$;

3) обчислюють теоретичне значення ймовірностей улучення значень x у j-й підінтервал P_j;

4) обчислюють ступінь розбіжності теоретичної й емпіричної ймовірностей U;

5) за обчисленим значенням $U = \chi^2$ та числом степенів вільності за таблицею розподілу χ^2_{T} визначають імовірність того, що величина χ^2 зі $(n - r - 1)$ степенями вільності перевершить це значення;

6) роблять висновок: якщо ймовірність того, що значення розбіжності більше, ніж обчислене, перевищує деякий рівень значущості, то гіпотеза H_0 про вид розподілу підтверджується, тому що розбіжності можна вважати несуттєвими, зумовленими випадковими чинниками. Якщо ймовірність мала, то гіпотеза H_0 відкидається, оскільки розбіжності не можна вважати несуттєвими.

Рекомендується вибирати $n = 20 - 50$. У кожен підінтервал має попадати не менше $5 - 10$ значень, інакше підінтервали об'єднують.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Від правильної організації й подання результатів моделювання залежить якість моделювання і остаточні висновки.

Зазвичай у процесі статистичного оцінювання доводиться обробляти велику кількість даних. Рекомендується так організовувати обробку результатів, щоб оцінки формувалися без запам'ятовування проміжної інформації, тобто рекурентно.

Для моделювання й оцінювання характеристик випадкових процесів широко використовують властивість ергодичності, що дозволяє істотно спростити алгоритми обчислень параметрів, використовуючи тільки одну реалізацію процесу.

Якщо потрібно знайти не тільки точкову оцінку параметра, але й оцінити його точність та надійність, застосовують інтервальну оцінку, точність якої визначається шириною довірчого інтервалу, а надійність – довірчою імовірністю.

Для оцінювання правильності прийнятої у процесі моделю-

вання гіпотези застосовують критерії згоди, суть яких полягає у виборі деякої випадкової величини, що характеризує ступінь розбіжності теоретичного й емпіричного розподілів.

Для встановлення зв'язку між досліджуваними змінними використовують кореляційний аналіз.

Застосування регресійного аналізу дає змогу побудувати модель, що якнайкраще відповідає набору даних експерименту.

Дисперсійний аналіз дозволяє під час оброблення результатів моделювання перевіряти тотожність вибіркової й генеральної дисперсій.

Важливе значення має правильний вибір діапазону змінювання досліджуваних параметрів і масштабу відображення результатів моделювання.

У разі великого обсягу досліджень і багатофакторного аналізу доцільно використовувати методи планування експериментів.

Питання для самоперевірки

1. Як визначають якість оцінок: «незсувність»; «ефективність»; «обґрунтованість»?

2. Чим відрізняється точкова оцінка від інтервальної?

3. Назвіть основні показники, якими характеризуються випадкова подія, випадкова величина і процес?

4. Як властивість ергодичності дозволяє спростити процедуру оцінювання характеристик випадкового процесу?

5. Що характеризує кореляційна функція? Запишіть вираз, що встановлює зв'язок часового інтервалу з кроком і номером дискретизації.

6. Який фізичний зміст має спектральна щільність випадкового процесу?

7. У якому випадку застосовують критерії згоди? Наведіть основні етапи процедури перевірки гіпотез.

5. МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЙ РУХУ ЛІТАКІВ

Під час вивчення і дослідження завдань, пов'язаних з КПР, необхідно моделювати просторові траєкторії руху літаків.

Основна вимога до математичних моделей – збереження достатнього ступеня адекватності реальному процесу польоту за максимального спрощення моделі, що дозволяє реалізувати на комп'ютері програму, здатну працювати в реальному масштабі часу.

У загальному випадку траєкторія руху літака має стохастичний (випадковий) характер, оскільки вона залежить від багатьох випадкових чинників, що приводять до відхилень від заданої траєкторії польоту.

5.1. Динамічні моделі керованого руху літака

Для коректного вирішення завдань, пов'язаних із керуванням рухом літаків, необхідно під час розроблення математичних моделей враховувати динамічні характеристики об'єкта керування, його просторову стабілізацію, закони траєкторного керування, роботу пілотажно-навігаційного комплексу.

Математичний опис руху літака. Рух літака в повітряному просторі є складним процесом і являє собою зміну основних параметрів лінійних і кутових координат та їх похідних у двох взаємозалежних рухах: русі центра мас і обертальному русі відносно центра мас. Аеродинамічні сили, що діють на літак, визначаються швидкістю й положенням літака відносно потоку набігаючого повітря. Злітання літака, виконання плану польоту й посадка виконуються з прив'язкою до земної поверхні. Від кутового положення літака відносно земної поверхні залежить взаємна орієнтація в просторі аеродинамічних сил, сили тяги й моментів. Тому рух літака розглядають як відносно повітря, так і відносно земної поверхні.

Залежно від конкретної задачі для математичного опису обирають потрібну систему координат. На рис. 5.1 показано взаємне положення основних застосовуваних систем координат:

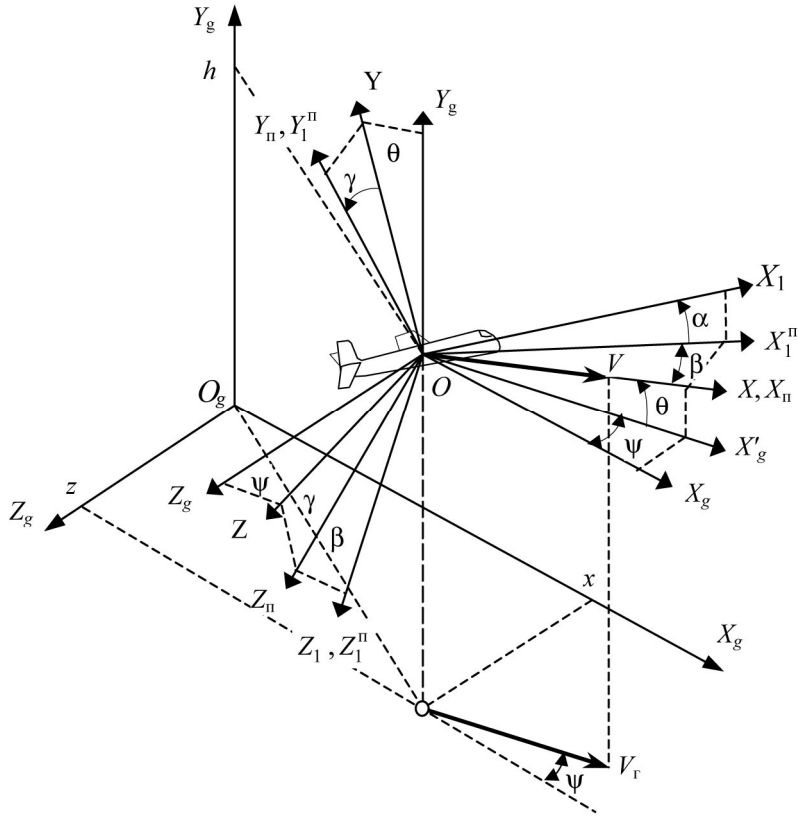

Рис. 5.1. Системи координат, що використовують для математичного опису руху літаків

$O_g X_g Y_g Z_g$ – земної системи координат, вісь $O_g X_g$ якої напрямлена вздовж ортодромії польоту (лінії заданого шляху), а вісь $O_g Y_g$ – вертикально вгору; $OXYZ$ – швидкісної системи координат, вісь OX якої напрямлена паралельно вектору шляхової швидкості V, а вісь OY – перпендикулярно до осі OX у місцевій вертикальній площині, що містить вектор V; $OX_п Y_п Z_п$ – потокової системи координат, що відрізняється від швидкісної різною орієнтацією осей $OY_п$ і OY: площина $X_п OY_п$ утворює з площиною XOY кут крену γ; $OX_1 Y_1 Z_1$ – зв'язаної системи координат, вісь OX_1 якої

напрямлена вздовж поздовжньої осі літака, а вісь OY_1 розміщена у вертикальній площині симетрії літака і напрямлена перпендикулярно до осі OX_1; $OX_1^{\text{п}}Y_1^{\text{п}}Z_1^{\text{п}}$ – напівзв'язаної системи координат, площина $X_1^{\text{п}}OY_1^{\text{п}}$ якої збігається з вертикальною площиною симетрії літака, а вісь $OX_1^{\text{п}}$ напрямлена паралельно проекції вектора швидкості на цю площину.

Кут атаки α і кут ковзання β визначають аеродинамічні сили, що діють на літак.

Положення швидкісної системи координат $OXYZ$ відносно земної $OX_gY_gZ_g$ визначається кутом нахилу траєкторії θ і шляховим кутом ψ.

Просторове положення зв'язаної системи координат $OX_1Y_1Z_1$ відносно земної системи $OX_gY_gZ_g$ визначається кутом тангажа ϑ (кутом між горизонтальною площиною і поздовжньою віссю літака), кутом рискання ψ_1 (кутом між віссю OX_g і проекцією осі OX_1 зв'язної системи координат на горизонтальну площину) та кутом крену γ (рис. 5.2).

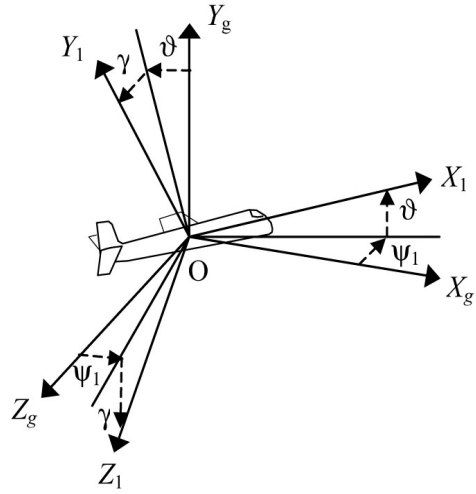

Рис. 5.2. Зв'язок земної системи координат зі зв'язаною системою

Найпростіший вигляд рівняння динаміки мають у швидкісній системі координат $OXYZ$, зв'язаній з траєкторією руху літака. Рух центра мас літака описується рівняннями

$$m\frac{dV}{dt}=\sum_i F_{x_i};\quad mV\omega_z=\sum_i F_{y_i};\quad -mV\omega_y=\sum_i F_{z_i},$$

де m – маса літака; V – швидкість польоту; ω_z, ω_y – кутові швидкості обертання навколо осей x і y відповідно, а праві частини

рівнянь являють собою проекції сил на осі швидкісної системи координат.

Земну систему координат із швидкісною можна сполучити двома послідовними поворотами на кут нахилу траєкторії θ і шляховий кут ψ, при цьому виконуються такі рівняння зв'язку:

$$\omega_x = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta; \quad \omega_y = \frac{d\psi}{dt}\cos\theta; \quad \omega_z = \frac{d\theta}{dt}.$$

Для більшості задач, пов'язаних із моделюванням повітряного руху, найбільш повну динамічну модель, можна подати рівняннями:

$$m\frac{dV}{dt} = P\cos\alpha - X - Z\beta - G\sin\theta + Y\alpha_{\text{в}}; \tag{5.1}$$

$$mV\frac{d\theta}{dt} = [P(\alpha-\varphi)+Y]\cos\gamma + (P\beta - X\beta - Z)\sin\gamma - G\cos\theta + X\alpha_{\text{в}};$$

$$-mV\cos\theta\frac{d\psi}{dt} = [P(\alpha-\varphi)+Y]\sin\gamma + (X\beta + Z - P\beta)\cos\gamma,$$

де P – тяга двигунів; $X = C_x S\dfrac{\rho V^2}{2}$ – сила лобового опору; S – площа крила; ρ – щільність повітря, $C_x(\alpha, M, \delta_3)$; $Z = C_z S\dfrac{\rho V^2}{2}$ – бічна аеродинамічна сила, $C_z(\beta)$; β – кут ковзання; $G = mg$ – вага літака; θ – кут нахилу траєкторії; $Y = C_y S\dfrac{\rho V^2}{2}$ – піднімальна сила, $C_y(\alpha, M, \delta_3)$; $\alpha_{\text{в}}$ – збільшення кута атаки під впливом вертикального вітру; φ – несиметрія тяги; γ – кут крену; ψ – шляховий кут.

Коефіцієнти аеродинамічних сил C_x, C_y обчислюють з урахуванням впливу числа Маха і відхилення закрилків δ_3.

Вплив турбулентної складової швидкості вітру враховується у рівнянні (5.1) зміною повітряної швидкості польоту, збільшеннями кута ковзання $\beta_{\text{в}}$ і кута атаки $\alpha_{\text{в}}$:

$$V' = V - U_{\text{г}}\cos(\psi - \delta_{\text{в}})\cos\theta; \tag{5.2}$$

$$\beta_{\text{в}} = \frac{U_{\text{б}}}{V'}; \tag{5.3}$$

$$\alpha_{\text{в}} = \left[\frac{U_{\text{в}}}{V'} \cos\theta - \frac{U_{\text{г}}}{V'} \cos(\psi - \delta_{\text{в}}) \sin\theta \right] \cos\gamma, \qquad (5.4)$$

де $U_{\text{г}}$, $U_{\text{в}}$ – горизонтальна і вертикальна складові швидкості вітру; $\delta_{\text{в}}$ – кут вітру; $U_{\text{б}}$ – швидкість бічного вітру;

$$U_{\text{б}} = U_{\text{г}} \sin(\psi - \delta_{\text{в}}) \cos\gamma \ . \qquad (5.5)$$

Кут атаки зв'язаний з кутами $\theta, \gamma, \alpha_{\text{в}}$ і кутом тангажа ϑ співвідношенням

$$\alpha = \alpha_{\text{в}} - \frac{\sin\theta - \sin\vartheta}{\cos\gamma\cos\theta} \ . \qquad (5.6)$$

Передбачається, що ковзання виникає під час турбулентності

$$\beta = \beta_{\text{в}} - \psi + \psi_1 \ , \qquad (5.7)$$

де ψ_1 – кут рискання, для обчислення якого вводять рівняння

$$-mV\cos\theta \frac{d\psi_1}{dt} = [P(\alpha - \varphi) + Y]\sin\gamma \ . \qquad (5.8)$$

Для визначення руху літака відносно земної системи координат рівняння системи (5.1)–(5.8) доповнюються рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= V\sin\theta; \\ \frac{dx}{dt} &= V\cos\theta\cos\psi; \\ \frac{dz}{dt} &= V\cos\theta\sin\psi, \end{aligned} \qquad (5.9)$$

де h – висота польоту; x, z – ортодромічні координати.

Траєкторне керування. Керувальними змінними в розглянутій моделі руху літака (5.1) – (5.9) є P, γ, θ.

Керування швидкістю польоту здійснюється змінюванням тяги двигунів. Закон керування швидкістю польоту за наявності на борту підсистеми керування тягою двигуна записують у вигляді

$$\frac{dP}{dt} = k_v(V_3 - V) - k_v' \frac{dV}{dt},$$

де k_v, k_v' – передатні коефіцієнти; V_3 – задана швидкість польоту.

Керування траєкторією польоту в бічному русі здійснюється змінюванням кута крену. Закон зміни кута крену має вигляд:

$$\frac{d\gamma}{dt} = k_\gamma(\gamma_3 - \gamma),$$

де k_γ – передатний коефіцієнт; γ_3 – заданий кут крену, значення якого формується залежно від використовуваного методу навігації.

Так, у режимі стабілізації заданого кута курсу ψ_3

$$\gamma_3 = k_\psi(\psi_3 - \psi).$$

У режимі стабілізації заданого бічного відхилення z_3 від лінії шляху

$$\gamma_3 = k_z(z_3 - z) - k_z' \frac{dz}{dt}.$$

Для моделювання керування у вертикальному русі використовують закон

$$\frac{d\vartheta}{dt} = k_\vartheta(\vartheta_3 - \vartheta),$$

у якому заданий кут тангажа ϑ_3 у режимі стабілізації висоти польоту формується згідно із законом

$$\vartheta_3 = k_h(h_3 - h) - k_h' \frac{dh}{dt}.$$

Для моделювання керування вертикальною швидкістю можна застосувати закон

$$\frac{d\vartheta}{dt} = k_h'(\dot{h}_3 - \dot{h}).$$

Спрощення моделі. Для моделювання й дослідження багатьох задач, що враховують динаміку польоту, використовують більш просту математичну модель руху літака за таких припущень:

– політ відбувається в умовах стандартної атмосфери і без вітру;

– сила гравітації постійна;

– політ координований без ковзання;

– літак подано матеріальною точкою; ігноруються обертання навколо центра мас;

– тяга напрямлена вздовж поздовжньої осі літака.

З урахування цих припущень, а також з огляду на зміну маси літака в міру витрати палива Q рівняння, які описують рух літака, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
m\frac{dV}{dt} &= P\cos\alpha - X - mg\sin\theta;\\
mV\frac{d\theta}{dt} &= [P\sin\alpha + Y]\cos\gamma - mg\cos\theta;\\
-mV\cos\theta\frac{d\psi}{dt} &= [P\sin\alpha + Y]\sin\gamma;\\
\frac{dh}{dt} &= V\sin\theta;\\
\frac{dx}{dt} &= V\cos\theta\cos\psi;\\
\frac{dz}{dt} &= V\cos\theta\sin\psi;\\
\frac{dm}{dt} &= Q.
\end{aligned} \qquad (5.10)$$

5.2. Кінематичні модель керованого руху літака

Використання динамічних моделей керованого руху, що враховують усі визначені чинники, потребує досить великих потужностей комп'ютера. В автоматизованих системах керування повітряним рухом, які одночасно обробляють інформацію по декількох сотень літаків, такі моделі як (5.1)–(5.9) і (5.10) не застосовуються.

Для завдань КПР можна використовувати простіші моделі, які містять керовані параметри, що дозволяє враховувати особливості пілотування. Однак особливістю таких моделей є те, що зв'язок цих параметрів із координатами положення об'єкта нелінійний.

Багато часу літак витрачає на виконання горизонтального польоту. Плоский рух літака у фіксованій декартовій системі координат x, y (рис. 5.3) описують так:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V\sin\psi + U\sin\delta_{в}; \\ \dot{y} &= V\cos\psi + U\cos\delta_{в}; \\ \dot{\psi} &= \frac{g}{V}tg\gamma, \end{aligned} \qquad (5.11)$$

де V – повітряна швидкість польоту; ψ – кут курсу; U – швидкість вітру; $\delta_{в}$ – кут вітру; g – прискорення вільного падіння; γ – кут крену; W – шляхова швидкість.

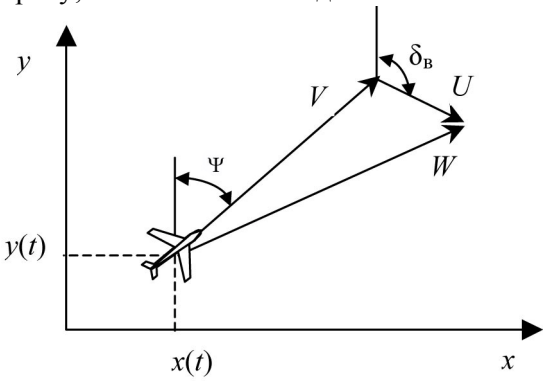

Рис. 5.3. Горизонтальний рух

Останнє рівняння системи (5.11) випливає з рівноваги сил у бічному русі при координованому розвороті літака.

Для ділянок, де відбувається маневрування по висоті та швидкості, систему рівнянь (5.11) можна доповнити і записати у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V\sin\psi\cos\theta + U\sin\delta_{в}; \\ \dot{y} &= V\cos\psi\cos\theta + U\cos\delta_{в}; \\ \dot{\psi} &= \frac{g}{V}tg\gamma; \\ \dot{V} &= a; \\ \dot{h} &= V\sin\theta \end{aligned} \qquad (5.12)$$

де θ – кут нахилу траєкторії; a – поздовжнє прискорення.

Щоб надати моделі (5.11) лінійного вигляду (2.1), виконують її лінеаризацію відносно відомої програмної траєкторії польоту $\{x_0 \quad y_0 \quad V_0 \quad \psi_0 \quad \gamma_0\}$:

$$\Delta\dot{x} = V_0 \cos\psi_0 \Delta\psi + \sin\psi_0 \Delta V + \sin\delta_в \Delta U;$$
$$\Delta\dot{y} = -V_0 \sin\psi_0 \Delta\psi + \cos\psi_0 \Delta V + \cos\delta_в \Delta U; \qquad (5.13)$$
$$\Delta\dot{\psi} = \frac{g}{V_0}\sec^2\gamma_0 \Delta\gamma - \frac{\dot{\psi}}{V}\Delta V,$$

де символом Δ позначено відхилення від програмної траєкторії.

Систему (5.13) можна записати у векторно-матричному вигляді:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F\vec{x} + B\vec{u} + G\vec{w},$$

якщо припустити, що вектор станів $\vec{x} = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta\psi]^{\mathrm{T}}$, вектор керувальних сигналів $\vec{u} = [\Delta V \quad \Delta\gamma]^{\mathrm{T}}$, вектор збурювальних впливів $\vec{w} = \Delta U$, і позначити:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & V_0\cos\psi_0 \\ 0 & 0 & -V_0\sin\psi_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} \sin\psi_0 & 0 \\ \cos\psi_0 & 0 \\ -\frac{\dot{\psi}_0}{V_0} & \frac{g}{V_0}\sec^2\gamma_0 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} \sin\psi_0 \\ \cos\psi_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для запису моделі (5.12) і лінеаризованому векторно-матричному вигляді слід припустити вектор станів як $\vec{x} = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta\psi \quad \Delta h \quad \Delta V]^{\mathrm{T}}$, а вектор керувань – $\vec{u} = [a \quad \gamma \quad \theta]^{\mathrm{T}}$.

5.3. Детерміновані моделі руху літака

Поліноміальні моделі. Найбільш широкого застосування в системах оброблення радіолокаційної інформації набули поліноміальні моделі, що описують рух літака відносно кожної осі тривимірної декартової системи координат *X,Y,Z* поліномом від часу *t*. Наприклад, для координати x

$$x(t) = f(a,t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2/2 + \ldots = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{t^k}{k!},$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – постійні коефіцієнти.

Важливим є вибір ступеня полінома. Літаки цивільної авіації більшу частину польоту виконують із постійними швидкістю,

курсом і висотою. У цьому разі рух описується поліномами першого ступеня (n=1) у горизонтальній системі, наприклад, у прямокутній системі X,Y:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + V_x t: \\ y(t) &= y(t_0) + V_y t, \end{aligned} \tag{5.14}$$

де $x(t_0), y(t_0)$ – координати початкового місцеположення літака; V_x, V_y – складові швидкості.

Збільшуючи ступінь полінома, можна досить точно описати будь-яку просторову траєкторію польоту. Однак у математичному забезпеченні існуючих АС КПР поліноми вищі від другого ступеня не використовуються.

Для рекурентного обчислення параметрів траєкторії поліноміальну модель (5.14) зручно подати у вигляді

$$\begin{aligned} x(t_i) &= x(t_{i-1}) + V_x \Delta t; \\ y(t_i) &= y(t_{i-1}) + V_y \Delta t. \end{aligned} \tag{5.15}$$

де $\Delta t = t_i - t_{i-1}$.

Отримані вирази (5.15) подано в дискретному вигляді і їх можна легко записати у векторно-матричній формі, якщо припустити, що вектор станів $\vec{x} = [x \quad V_x \quad y \quad V_y]^{\mathrm{T}}$ (T – операція транспонування) і врахувати, що швидкість польоту постійна:

$$\begin{bmatrix} x(i) \\ V_x(i) \\ y(i) \\ V_y(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i-1) \\ V_x(i-1) \\ y(i-1) \\ V_y(i-1) \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

або $\vec{x}(i) = \Phi(\Delta t)\vec{x}(i-1)$.

Таким чином, перехідна матриця $\Phi(\Delta t)$ визначається безпосередньо з математичного подання дискретної поліноміальної моделі.

Поліноміальну модель можна записати для неперервного процесу в загальному вигляді (2.1). Для поліноміальної моделі першого порядку коефіцієнти дорівнюють $a_0 = x(t_0)$; $a_1 = V_x$ і є константами (аналогічно для координати y). Тоді

$$\begin{cases} \dot{x} = V_x; \\ \dot{V}_x = 0; \\ \dot{y} = V_y; \\ \dot{V}_y = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{V}_x \\ \dot{y} \\ \dot{V}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ V_x \\ y \\ V_y \end{bmatrix}, \qquad (5.17)$$

або $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = F\vec{x}$.

Модель траєкторії руху літака на ділянці повороту. За умови виконання повороту по дузі кола з постійним радіусом з постійною швидкістю можна використовувати таку модель руху літака. Для відомого значення кута крену γ , з яким літак виконує розворот, радіус віражу

$$R = \frac{V^2}{g \ \mathrm{tg}\gamma} \ ,$$

де V – швидкість польоту; g – прискорення вільного падіння.

Згідно з наведеними умовами за час Δt літак, виконуючи розворот по дузі кола, розгорнеться на кут

$$\Delta\psi = (V\Delta t)/R.$$

Найбільш зручна для літаководіння, навігації і КПР – прямокутна частково-ортодромічна система координат S,Z , вісь S якої збігається з лінією заданого шляху (ЛЗШ). Взаємне положення загальної прямокутної системи координат X,Y, вісь Y якої збігається з напрямом на північ, і частково-ортодромічної системи координат S,Z показано на рис. 5.4. У разі переходу на нову ЛЗШ відповідно змінюється частково-ортодромічна система координат (S_1, Z_1 на S_2, Z_2).

У разі моделювання процесу польоту в частково-ортодромічній системі координат за умови польоту по ЛЗШ модель руху (5.15) спрощується і набуває вигляду

$$\begin{aligned} s(t_i) &= s(t_{i-1}) + V\ \Delta t; \\ z(t_i) &= 0. \end{aligned}$$

Для точного розрахунку траєкторії переходу на нову ЛЗШ під час повороту необхідно обчислити точку початку розвороту (лінійне попередження розвороту L – ЛПР), що визначають з виразу

$$L = R\,\mathrm{tg}\left|\frac{\psi_\mathrm{p}}{2}\right| ,$$

де $\psi_\mathrm{p} = \mathrm{ЗШК}_2 - \mathrm{ЗШК}_1$ – глибина розвороту; $\mathrm{ЗШК}_1$, $\mathrm{ЗШК}_2$ – задані шляхові кути.

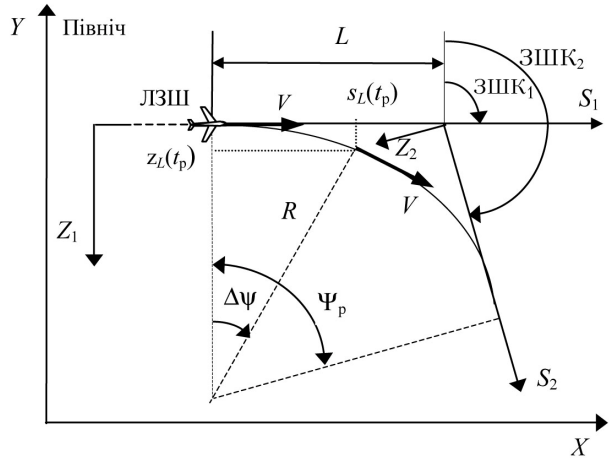

Рис. 5.4. Рух літака при повороті на іншу лінію заданого шляху

Зміну значення відхилення від поточної ЛЗШ під час повороту визначають з виразу

$$z_L(t_\mathrm{p}) = R\left(1 - \cos\left(\frac{Vt_\mathrm{p}}{R}\right)\right),$$

де t_p – час польоту по дузі ($t_\mathrm{p} = 0$ відповідає моменту початку повороту).

При цьому знак відхилення визначається знаком кута розвороту $\mathrm{sgn}(\psi_\mathrm{p})$, а зміна відстані від розрахункової точки ЛПР уздовж ЛЗШ

$$s_L(t_\mathrm{p}) = R\sin\left(\frac{Vt_\mathrm{p}}{R}\right).$$

Час повороту на нову ЛЗШ визначають з виразу

$$T_{\text{р}} = \frac{\psi_{\text{р}} R}{V} \ .$$

Таким чином, розрахунок точок траєкторії на повороті виконують від опорної точки початку розвороту ЛПР ($t_{\text{р}} = 0$). При цьому збільшення часу в міру виконання повороту задають виразом $t_{\text{р}}(i) = t_{\text{р}}(i-1) + \Delta t$.

Для визначення координат літака в загальної системі координат X, Y потрібно виконати відповідні перерахування.

5.4. Імовірнісні моделі руху літаків

Важливе значення як для вирішення завдань, пов'язаних з точністю літаководіння, так і для автосупроводження має дослідження випадкового процесу відхилення від заданих параметрів траєкторії руху літаків.

Так, у результаті статистичного оброблення вимірювань траєкторій множини польотів установлено, що відхилення літака від ЛЗШ у бічному русі може бути апроксимоване стаціонарним випадковим процесом з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією (яка встановлює зв'язок процесу в часових перетинах):

$$K_z(\tau) = \sigma_z^2 e^{-\alpha|\tau|}(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|) ,$$

де α – параметр, що характеризує час кореляції; ω_0 – коливальність процесу.

Важливим показником є дисперсія бічного відхилення σ_z^2, що характеризує точність літаководіння.

Аналогічно описують випадкові процеси відхилення від заданої швидкості та висоти польоту. Так, кореляційну функцію процесу відхилення від заданої швидкості польоту можна апроксимувати виразом

$$K_V(\tau) = \sigma_V^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau .$$

Моделювання відхилень від траєкторних параметрів, заданих кореляційними функціями, виконують за викладеною вище методикою (див. підрозд. 3.3).

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Об'єктом керування в системі ОПР є повітряний транспорт, тому в основу аналізу багатьох задач, пов'язаних із керуванням, покладено математичні моделі, що описують динамічний рух об'єкта по визначених траєкторіях.

Повнота опису руху повітряного транспорту залежить від функцій, що моделюються, і цілей моделювання. Так, у реальних АС КПР для вторинної обробки радіолокаційної інформації використовують прості поліноміальні моделі першого чи другого порядку. Однак для зони з інтенсивним маневруванням і вирішення завдання прогнозування з метою виявлення конфліктних ситуацій потрібен більш детальний опис. Водночас використання складних моделей потребує високої швидкодії, великої ємності пам'яті комп'ютера і здебільшого виявляється недоцільним.

Для розроблення математичних моделей важливе значення має вибір системи координат, тому що від цього залежить вид функціонального зв'язку параметрів моделі з вимірюваними параметрами.

Для врахування й аналізу відхилень від заданих траєкторій польоту використовують стохастичні моделі. При цьому можна застосовувати такі способи побудови моделі. Перший спосіб полягає у використанні наявних чи спеціально оброблених статистичних даних про процес польоту. Зазвичай такими даними є кореляційні функції. Другий спосіб полягає в розробленні моделі, що синтезується на основі фізичних розумінь, урахування законів траєкторного керування, випадкових навігаційних похибок, похибок пілотування та ін. Можливий комбінований підхід.

Для комп'ютерної реалізації розроблених моделей потрібна дискретна форма подання моделей. Тут можуть виникати проблеми, якщо модель синтезована в неперервній формі, включає нелінійні елементи або має велику розмірність.

Питання для самоперевірки

1. Запишіть у загальному векторно-матричному вигляді динамічну модель процесу польоту з урахуванням керувальних і збурювальних впливів.
2. Які параметри входять до складу динамічних моделей?
3. У яких випадках застосовують детерміновані та імовірнісні математичні моделі, що описують рух літаків?
4. Запишіть модель прямолінійного рівномірного руху літака.

5. Знайдіть перехідну матрицю, що визначає перехід від одного стану до іншого для моделі рівномірного прямолінійного руху.

6. Запишіть поліноміальну модель *n*-го порядку в просторі станів.

7. Поясніть процедуру синтезу математичної моделі випадкового процесу в просторі станів за відомою кореляційною функцією цього процесу.

8. Для чого і яким чином здійснюється дискретизація математичних моделей?

9. Як вирішують проблему адекватності математичної моделі реальному процесу польоту?

6. МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРНИХ ВИМІРЮВАНЬ

6.1. Моделювання радіолокаційних вимірювань

Для моделювання процесів оброблення радіолокаційної інформації та відображення динамічної повітряної ситуації необхідно імітувати роботу радіолокаційних систем, що є основними джерелами координатної інформації про місцеположення ПК в АС КПР. У системах КПР використовуються оглядові радіолокаційні станції (РЛС), що вимірюють похилу дальність ρ до ПК і азимут θ (рис. 6.1).

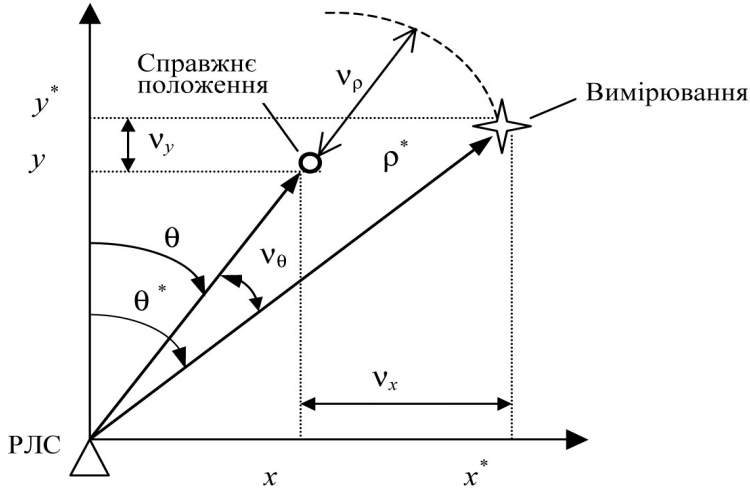

Рис. 6.1. Похибки визначення місцеположення літака за радіолокаційних вимірювань

Загальну схему моделювання траєкторних вимірювань показано на рис. 6.2.

Для прямолінійної ділянки польоту формування точок локації не складне і полягає в обчисленні координат відповідно до виразів (5.15), (5.16) із кроком дискретизації, що дорівнює періоду огляду РЛС $\Delta t = T$.

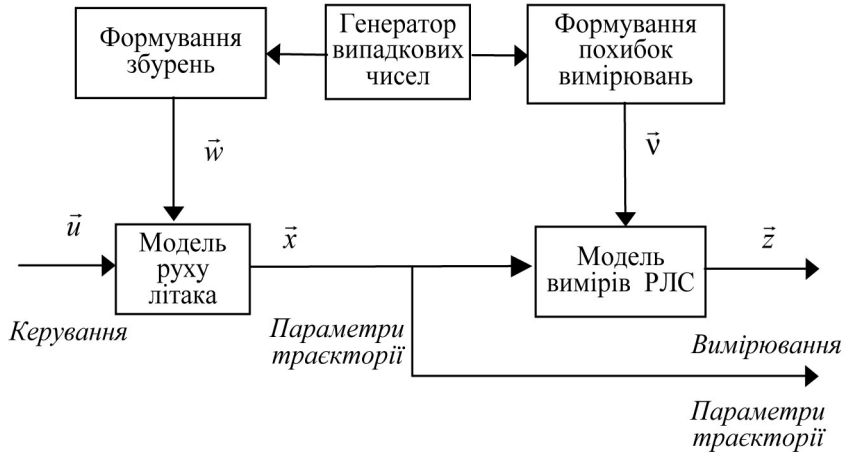

Рис. 6.2. Загальна схема моделювання радіолокаційних вимірювань

У разі моделювання на ділянці повороту момент локації в загальному випадку не збігається з моментами початку і кінця розвороту і цей факт потрібно враховувати.

Похибки вимірювань РЛС мають систематичну й випадкову складові. Зазвичай вважають, що систематична похибка скомпенсована. Випадкові похибки зумовлені впливом великої кількості чинників і підкоряються нормальному закону розподілу з параметрами $(0,\sigma)$. Похибки вимірювань дальності ν_ρ і азимута ν_θ є адитивними, тобто результати вимірювань, що надходять в *i*-й момент часу (огляду локатора), які позначено через ρ^* і θ^*, можна записати у вигляді:

$$\rho^*(i) = \rho(i) + \nu_\rho(i); \qquad \theta^*(i) = \theta(i) + \nu_\theta(i).$$

Для оглядових РЛС, у яких період огляду становіть 5 – 20 с, випадкові похибки вимірювань можна вважати незалежними в часі, що математично записують:

$$M\{\nu_\rho(i)\nu_\rho(k)\}=\sigma_\rho^2\delta_{ik}\,; \qquad M\{\nu_\theta(i)\nu_\theta(k)\}=\sigma_\theta^2\delta_{ik}\,,$$

де $\delta_{ik}=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad i=k;\\ 0, & \text{якщо} \quad i\neq k.\end{cases}$

Для встановлених інтервалів дальності дисперсії похибок вимірювань дальності й азимута вважають постійними $\sigma_\rho=\text{const}$; $\sigma_\theta=\text{const}$.

Для імітації радіолокаційних вимірювань необхідно для наперед розрахованих точок локації обчислити дальність точки локації до РЛС і азимут. Якщо точки локації визначаються в прямокутній системі координат *X,Y*, то для перерахування в полярну систему координат ρ,θ необхідно використовувати співвідношення

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,; \quad \theta'=\text{arctg}\left|\frac{x}{y}\right|;$$

$$\theta=\begin{cases}\text{невизначено}, & \text{якщо} \quad x=0, \quad y=0;\\ \pi/2, & \text{якщо} \quad x>0, \quad y=0;\\ 3\pi/2, & \text{якщо} \quad x<0, \quad y=0;\\ \theta', & \text{якщо} \quad x>0, \quad y>0;\\ \pi-\theta', & \text{якщо} \quad x>0, \quad y<0;\\ \pi+\theta', & \text{якщо} \quad x<0, \quad y<0;\\ 2\pi-\theta', & \text{якщо} \quad x<0, \quad y>0.\end{cases}$$

В АС КПР радіолокаційні вимірювання, перш ніж надійти на оброблення, можуть заздалегідь перераховуватися з полярної системи координат у прямокутну:

$$x^*=\rho^*\sin\theta^*; \qquad y^*=\rho^*\cos\theta^*.$$

У цьому випадку зв'язок координат *x, y* з вимірюваними параметрами ρ^*, θ^* має нелінійний вигляд і, отже, статистичні характеристики похибок визначення прямокутних координат втрачають властивість адитивності, а також властивість постійності, оскільки вони стають залежними від місцеположення ПК.

Таким чином, залежно від завдання моделювання вектор вимірювань формують як $\vec{z}=[\rho^*\ \theta^*]^{\mathrm{T}}$, або як $\vec{z}=[x^*\ y^*]^{\mathrm{T}}$.

6.2. Статистичні характеристики похибок траєкторних вимірювань

Для знаходження статистичних характеристик похибок, перерахованих у прямокутну систему координат вимірювань РЛС, можна скористатися звичайним методом лінеаризації, у результаті якого одержують вирази:

$$x^*(i) \cong x(i) + \nu_x(i); \qquad y^*(i) \cong y(i) + \nu_y(i),$$

де x^*, y^* – перераховані в прямокутну систему координат вимірювання дальності й азимута; ν_x, ν_y – відповідні випадкові похибки визначення прямокутних координат.

Розв'яжемо цю задачу для координати x. Запишемо зв'язок координати з виміряними значеннями дальності й азимута:

$$x^* = f(\rho^*, \theta^*) = \rho^* \sin\theta^*.$$

Зробимо лінеаризацію цього виразу шляхом розкладання функції $f(\rho^*, \theta^*)$ в ряд Тейлора щодо істинних значень ρ, θ, відкидаючи члени ряду вище першого порядку

$$x^* = f(\rho, \theta) + \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho^* - \rho) + \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta^* - \theta) = x + \frac{\partial f}{\partial \rho}\nu_\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta}\nu_\theta .$$

Звідси похибка визначення координати x

$$\nu_x = \frac{\partial f}{\partial \rho}\nu_\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta}\nu_\theta = \sin\theta\,\nu_\rho + \rho\cos\theta\,\nu_\theta .$$

Визначимо дисперсію цієї похибки

$$D_{\nu_x} = \sigma_x^2 = M\left[\nu_x^2\right] = M\left[\nu_\rho^2 \sin^2\theta + 2\rho\nu_\rho\nu_\theta \sin\theta\cos\theta + \rho^2\nu_\theta^2\cos^2\theta\right].$$

Застосуємо операцію математичного сподівання до кожного доданка, при цьому врахуємо, що оскільки похибки вимірювань дальності й азимута незалежні, то $M[\nu_\rho\nu_\theta] = 0$.

У результаті одержимо

$$\sigma_x^2 = \sigma_\rho^2 \sin^2\theta + \rho^2\sigma_\theta^2\cos^2\theta .$$

Аналогічно для координати y

$$\sigma_y^2 = \sigma_\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2\sigma_\theta^2\sin^2\theta .$$

Зауважимо, що дисперсія похибок визначення прямокутних координат залежить від ПК (значень ρ, θ), у той час, як дисперсії похибок вимірювань дальності і кута не змінюються.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Основними джерелами інформації про польотну ситуацію залишаються радіолокаційні системи. Незважаючи на постійне удосконалення таких систем, вони мають певний рівень як систематичних, так і чисто випадкових похибок вимірювань. Під час моделювання вимірювань, як правило, припускають, що випадкові похибки некорельовані і мають нормальний закон розподілу.

Певною проблемою як у процесі оброблення радіолокаційних вимірювань, так і в разі їх моделювання є нелінійний зв'язок вимірюваних параметрів – похилої дальності й азимута – із прямокутними координатами положення літаків.

Перш ніж результати вимірювань надійдуть на обробку в АС КПР для розв'язання задач, пов'язаних з керуванням рухом літаків, вони піддаються первинній обробці, яка виконується зазвичай у вимірювальному комплексі і полягає у виявленні корисних сигналів на фоні випадкових завад, виділенні координатної і додаткової інформації, її обчисленні та кодуванні.

З урахуванням тенденції розвитку глобальної системи зв'язку, навігації й спостереження і відповідно до рекомендацій ІСАО необхідно досліджувати питання, пов'язані з використанням супутникових інформаційних технологій у системах ОПР.

Питання для самоперевірки

1. Перелічіть основні технічні засоби, що застосовуються для визначення параметрів траєкторії польоту ПК. Які параметри вони визначають?
2. Укажіть, яка розбіжність у принципах вимірювання координат у первинних, вторинних РЛС і РЛС з адресним запитом.
3. Запишіть математичні вирази, що встановлюють зв'язок параметрів, вимірюваних РЛС, з координатами місцеположення об'єкта в прямокутній системі координат.
4. Що таке еліпс правдоподібності для вимірювань РЛС?
5. Наведіть статистичні характеристики похибок вимірювань РЛС, які використовують для їх моделювання.
6. Які завдання первинного оброблення вимірювальної інформації?
7. Сформулюйте завдання моделювання процесу виявлення відбитого сигналу РЛС.
8. Як під час моделювання слід враховувати вплив взаємного положення РЛС і літака на точність визначення місцеположення літака?

7. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОБРОБЛЕННЯ ТРАЄКТОРНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

7.1. Постановка завдання моделювання траєкторного оцінювання

Завдання оцінювання параметрів траєкторії руху літака полягає у фільтрації похибок вимірювань РЛС для одержання більш точної оцінки місцеположення літака, а також у визначенні інших необхідних для процесу керування траєкторних параметрів – швидкості польоту, прискорення, які радіолокаторами не вимірюються. В АС КПР це складає етап вторинного оброблення радіолокаційної інформації.

Математичну постановку задачі в лінійному вигляді в загальному випадку формулюють таким чином (рис.7.1).

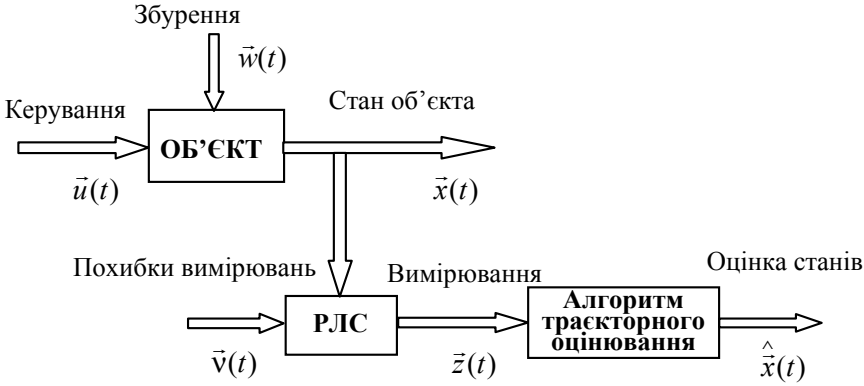

Рис. 7.1. Постановка задачі траєкторного оцінювання

З огляду на те, що оброблення траєкторної інформації виконується на комп'ютері і траєкторні вимірювання надходять у дискретні моменти часу, математична постановка подається у дискретному вигляді.

Задано математичну модель динамічної системи (керованого об'єкта) у вигляді фізичних співвідношень між вектором станів $\vec{x}$,

вектором керувань $\vec{u}$ і вектором збурювальних чинників $\vec{w}$ для дискретних моментів часу t_i і t_{i-1} в загальному вигляді (2.5):

$$\vec{x}(i) = \Phi(i, i-1)\vec{x}(i-1) + B(i-1)\vec{u}(i-1) + G(i-1)\vec{w}(i-1),$$

де $\Phi(i, i-1)$ – перехідна матриця; $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ – крок дискретизації.

Задано математичну модель вимірювальної системи у вигляді співвідношень між вимірюваними сигналами $\vec{z}$, вектором станів $\vec{x}$ і похибками вимірювань $\vec{\nu}$:

$$\vec{z}(i) = H\vec{x}(i) + \vec{\nu}(i) \ .$$

При цьому інформація через особливість роботи оглядової РЛС надходить у дискретні моменти часу $t = t_i$.

Задано статистичні характеристики випадкових процесів $\vec{w}$ і $\vec{\nu}$.

Потрібно знайти оцінку станів $\vec{x}(t/t')$ на підставі обробки результатів вимірювань $\vec{z}(t)$, що надійшли до моменту і в момент часу t' за умови, що оцінка задовольняє заданий критерій якості

$$J(\tilde{\vec{x}}) = \min,$$

що встановлює ступінь відхилення оцінки від істинного значення вектора станів $\tilde{\vec{x}} = \hat{\vec{x}} - \vec{x}$.

Залежно від моменту часу t відносно фіксованого моменту t' оцінка $\hat{\vec{x}}(t/t')$ формується процедурою згладжування, фільтрації або прогнозування:

– якщо $t = t'$ – оцінка фільтрації;

– якщо $t < t'$ – оцінка згладжування;

– якщо $t > t'$ – оцінка прогнозування.

Як критерій оптимального оцінювання станів беруть мінімум середньоквадратичної похибки оцінки

$$J = M\{(\hat{\vec{x}} - \vec{x})^{\mathrm{T}}(\hat{\vec{x}} - \vec{x})\} = \min,$$

тобто мінімум суми середньоквадратичних похибок оцінок окремих складових вектора станів:

$$M\{(\hat{\vec{x}} - \vec{x})^{\mathrm{T}}(\hat{\vec{x}} - \vec{x})\} = p_{x1} + p_{x2} + ... + p_{xn} \ ,$$

де $p_{x1} = M\{(\hat{x}_1 - x_1)^2\}$.

Статистичні властивості вектора похибок оцінки $\vec{\tilde{x}} = \hat{\vec{x}} - \vec{x}$ характеризуються кореляційною матрицею похибок оцінки:

$$P = M\{\vec{\tilde{x}}\,\vec{\tilde{x}}^{\mathrm{T}}\} = M\begin{bmatrix} \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_1\tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_1\tilde{x}_n \\ \tilde{x}_2\tilde{x}_1 & \tilde{x}_2^2 & \cdots & \tilde{x}_2\tilde{x}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{x}_n\tilde{x}_1 & \tilde{x}_n\tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

у якій діагональні елементи являють собою дисперсії похибок оцінок складових вектора станів, тобто $p_{11} = p_{x1}$, $p_{22} = p_{x2}$ і т. д.

7.2. Моделювання рекурентних алгоритмів траєкторного оцінювання

Загальну схему моделювання алгоритму оброблення траєкторних вимірювань показано на рис. 7.2.

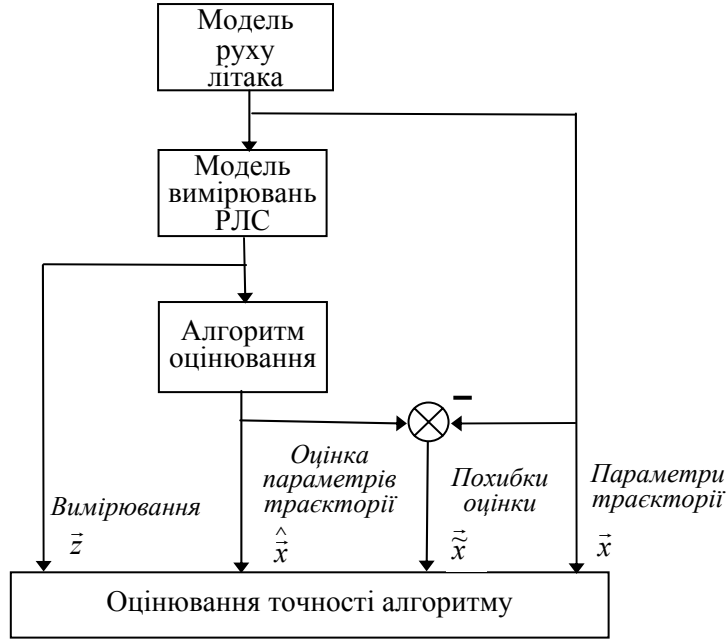

Рис. 7.2. Загальна схема моделювання оброблення траєкторних вимірювань

У сучасних АС КПР алгоритми оброблення радіолокаційної інформації будують на базі лінійного фільтра Калмана.

Математична постановка узагальненого дискретного методу Калмана припускає, що вектор збурювальних впливів являє собою випадкову послідовність типу «дискретний білий шум» із нульовим математичним сподіванням $M\{\vec{w}(i)\} = 0$ і кореляційною матрицею

$$M\{\vec{w}(i)\vec{w}^{\mathrm{T}}(j)\} = Q(i)\delta_{ij} \ ,$$

де δ_{ij} – функція Кронекера: $\delta_{ij} = 1$, якщо $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$; Q – матриця інтенсивностей білого шуму, елементи якої визначаються з урахуванням властивостей білого шуму:

$$M\{\vec{w}_i \vec{w}_j^{\mathrm{T}}\} = M\begin{bmatrix} w_{1i}w_{1j} & w_{1i}w_{2j} & \cdots & w_{1i}w_{sj} \\ w_{2i}w_{1j} & w_{2i}w_{2j} & \cdots & w_{2i}w_{sj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{si}w_{1j} & w_{si}w_{2j} & \cdots & w_{si}w_{sj} \end{bmatrix} = Q\delta_{ij}.$$

Похибки вимірювань $\vec{\nu}$ – нормально розподілений вектор похибок вимірювань типу «дискретний білий шум» зі статистичними характеристиками, аналогічними характеристикам збурювального впливу, тобто

$$M\{\vec{\nu}_i\} = 0; \qquad M\{\vec{\nu}_i \vec{\nu}_j^{T}\} = R_i\delta_{ij}.$$

Рівняння фільтра Калмана являють собою реалізацію ідеї прогнозу з наступним коригуванням за результатами вимірювань і мають такий вигляд:

– прогнозування на крок дискретизації $\Delta t = t_i - t_{i-1}$:

$$\hat{\vec{x}}(i/i-1) = \Phi(i,i-1)\hat{\vec{x}}(i-1) + B(i-1)\vec{u}(i-1);$$
$$P(i/i-1) = \Phi(i,i-1)P(i-1)\Phi^{\mathrm{T}}(i,i-1) + G(i-1)Q(i-1)G^{\mathrm{T}}(i-1);$$

– оцінювання (коригування прогнозу):

$$\hat{\vec{x}}(i) = \hat{\vec{x}}(i/i-1) + K(i)[\vec{z}(i) - H(i)\hat{\vec{x}}(i/i-1)]; \qquad (7.1)$$
$$P(i) = [I - K(i)H(i)]P(i/i-1),$$

де $K(i) = P(i/i-1)H^{\mathrm{T}}(i)[H(i)P(i/i-1)H^{\mathrm{T}}(i) + R(i)]^{-1}$ – матриця коефіцієнтів корекції.

Структурну схему рекурентного фільтра показано на рис. 7.3.

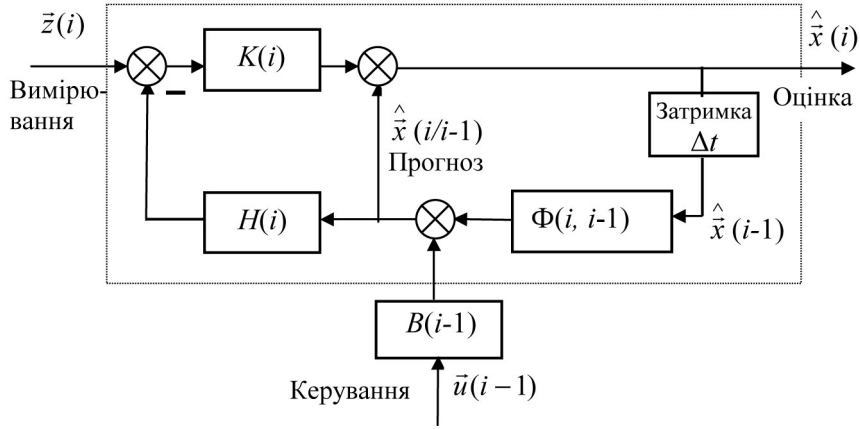

Рис. 7.3. Схема рекурентного фільтра

7.3. Моделювання алгоритму ковзного згладжування

В АС КПР широко застосовують найбільш економний в обчислювальному відношенні алгоритм $\alpha-\beta$ фільтра, рівняння якого виводять із припущення, що літак виконує прямолінійний політ з постійною швидкістю, а радіолокаційні вимірювання є рівноточними і надходять на обробку через рівнодискретні моменти часу. Рекурентні вирази α–β фільтра, отримані з використанням методу найменших квадратів, дозволяють оцінювати координату x місцеположення ПК і складової швидкості $V_x = \dot{x}$ в i-й (поточний) момент локації і мають такий вигляд (для координати y і швидкості V_y рівняння мають аналогічний вигляд):

$$\begin{aligned} \hat{x}(i) &= x^e(i) + \alpha[x^*(i) - x^e(i)]; \\ \hat{V}_x(i) &= \hat{V}_x(i-1) + \beta[x^*(i) - x^e(i)]/T, \end{aligned} \tag{7.2}$$

де $x^e(i) = \hat{x}(i-1) + \hat{V}_x(i-1)T$ – прогнозоване (екстрапольоване) значення координати на i-й момент локації за даними оцінки коор-

динати, отриманими на попередньому (i-1)-му моменті локації (T – період огляду радіолокатора); $x^*(i)$ – обмірюване радіолокатором значення координати місцеположення ПК на i-му періоді огляду; α, β – коефіцієнти коригування за координатою та швидкістю, які визначають відповідно до виразів:

$$\alpha = \frac{2(2i-1)}{i(i+1)}\ ; \qquad \beta = \frac{6}{i(i+1)},$$

де i – кількість радіолокаційних вимірювань.

Теоретичне значення дисперсій похибок оцінки координати й швидкості, що отримані з використанням α–β фільтра, визначають за виразами:

$$D[\tilde{x}_i] = \frac{2(2i-1)}{i(i+1)}\sigma^2\ ; \qquad D[\tilde{V}_i] = \frac{12}{T^2 i(i^2-1)}\sigma^2,$$

де $\tilde{x} = \hat{x} - x$; $\tilde{V} = \hat{V} - V$ – похибки оцінювання координати і швидкості відповідно; σ – середньоквадратична похибка вимірювань РЛС.

Фільтр Калмана є більш загальним методом і $\alpha-\beta$ фільтр можна подати у вигляді фільтра Калмана.

Приклад 7.1. Записати рівняння $\alpha-\beta$ фільтра у вигляді рекурентного фільтра Калмана.

За гіпотезою про рівномірний прямолінійний політ рекурентну модель руху вздовж координати x записуємо у вигляді (аналогічно для координати y):

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + V_x T\ .$$

Якщо припустити, що вектор станів $\vec{x} = [x \quad V_x]^{\mathrm{T}}$ і врахувати, що швидкість польоту постійна, то можна записати

$$\begin{bmatrix} x(i) \\ V_x(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i-1) \\ V_x(i-1) \end{bmatrix},$$

або $\vec{x}(i) = \Phi(T)\vec{x}(i-1)$.

Тут перехідна матриця $\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ визначається безпосередньо з математичного подання дискретної моделі.

Математичну модель вимірювань записуємо у вигляді

$$x^*(i) = x(i) + \nu_x(i) \ ,$$

а у векторно-матричному вигляді

$$[x^*(i)] = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x\ (i) \\ V_x(i) \end{bmatrix} + [\nu_x(i)] \ ,$$

тобто

$$\vec{z} = [x^*(i)]; \quad H = [1 \quad 0]; \quad \vec{\nu}(i) = \left[\nu_x(i)\right],$$

якщо $M\{\vec{\nu}_i \vec{\nu}_j^{\mathrm{T}}\} = R_i \delta_{ij}$; $R = [\sigma_x^2]$.

За цих умов матриця коефіцієнтів коригування фільтра Калмана $K = [\alpha, \quad \beta / T]^{\mathrm{T}}$.

У результаті фільтр можна записати в просторі станів у загальному рекурентному вигляді (7.1):

$$\hat{\vec{x}}(i) = \Phi \hat{\vec{x}}(i-1) + K[\vec{z}(i) - H\Phi\hat{\vec{x}}(i-1)] \ .$$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Вирішуючи завдання підвищення ефективності систем ОПР, важливу роль приділяють засобам і процедурам автоматизації. В АС КПР це має бути досягнуто за рахунок визначення для кожного літака його чотирикоординатної траєкторії польоту; постійного відстеження польотної ситуації; визначення безконфліктності профілю польотів і розрахунку варіантів розв'язання потенційно конфліктних ситуацій; модифікації і відновлення профілів польоту.

Прийняття рішення щодо керування рухом ПК ґрунтується на оцінці поточної польотної ситуації і її прогнозі. Унаслідок досить високого рівня невизначеності у системі даних, що надходять про поточну польотну ситуацію, а також впливу багатьох випадкових чинників на процес польоту, це завдання має стохастичний характер. При цьому в реальних системах використовують оптимальні стохастичні алгоритми оброблення інформації.

Проблема розроблення й оцінювання характеристик алгоритмів контролю руху повітряного транспорту полягає в тому, що за вимогою безпеки польотів перевірка роботи цих алгоритмів не може бути апробована шляхом створення реальних конфліктних ситуацій. Тому моделюванню процесів оброблення траєкторної інформації і якості моделювання надається надзвичайно важливе значення.

Питання для самоперевірки

1. Які завдання вирішують на етапі вторинного оброблення інформації в АС КПР?

2. Наведіть етапи моделювання процесів виявлення, ідентифікації й автосупроводження.

3. Сформулюйте постановку завдання моделювання процесу згладжування траєкторних радіолокаційних вимірювань.

4. Які математичні методи використовують в алгоритмах згладжування радіолокаційних вимірювань?

5. Що є причиною розбіжності траєкторного оцінювання (і як наслідок цього – зриви автосупровождення)? Які методи вирішення цієї проблеми?

6. Як моделюється алгоритм рекурентного опрацювання інформації?

7. Наведіть етапи моделювання процесу оптимального оцінювання параметрів траєкторії польоту.

8. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЛАНУВАННЯ ПОВІТРЯНОГО РУХУ

8.1. Завдання автоматизації процесу поточного планування

У системі керування повітряним рухом найбільше автоматизований процес поточного планування польотів, процедура якого, по суті, являє собою моделювання просторово-часової траєкторії польоту в прискореному масштабі часу.

Контроль за виконанням добового плану польотів здійснюють в інтервалі від 00 год 00 хв до 24 год 00 хв у день виконання польотів. Контроль починається до входу ПК у простір керування й моменту одержання інформації про уточнений час входу і закінчується під час виходу ПК із зони керування. Під час контролю в системі здійснюється поточне планування, що являє собою процес розрахунку і фіксації сукупності безконфліктних просторово-часових траєкторій польоту, планованих для кожного ПК на весь політ у межах простору керування з урахуванням заданих обмежень і прийнятності спланованих траєкторій для суміжних приймальних систем керування.

Профіль – передбачувана найбільш імовірна чотирикоординатна (*x, y, h, t*) траєкторія ПК від його поточного місцеположення до кінцевого пункту польоту. Його описують списком суттєвих подій, що формують майбутнє проходження польоту, таких як:

– проліт точки маршруту або проходження по прямій трасі;

– перетинання межі сектора;

– початок і кінець піднімання/зниження/зміни швидкості і т.д.

Кожна з цих подій асоціюється з розрахунковим часом і передбачуваними поточним та дозволеним ешелонами. Профіль складається з послідовних дозволів, які надає служба КПР пілоту, і має силу домовленості. Будь-яку зміну в профілі потрібно повторно погоджувати.

Для розрахунку профілю польоту система має прагнути до максимального задоволення запитів та інтересів усіх користувачів, але з урахуванням сформованої польотної ситуації, накладених обмежень, погодних умов, даних стану системи.

Доти ПК не злетів, профіль польоту має індикативне значення, підтверджує існуючу попередню домовленість. Відразу ж після злітання визначений профіль прораховується системою й результат обчислень стає доступним диспетчерам відповідних секторів та пілоту.

Якщо з якихось причин ПК ухиляється від спланованого профілю польоту, система має виявляти цю подію і, якщо це відхилення перевищує визначений поріг, відповідні попередження повинні бути видані диспетчеру й пілоту і має розпочатись пошук конфлікту з урахуванням виявленого відхилення. Виявлений у цьому разі ризик конфлікту потрібно відображати так, щоб він відрізнявся від ризику конфлікту звичайним відстеженням профілю.

Систематична перевірка відхилень поточного місцеположення ПК від визначеного положення й оцінка ризику конфліктів складають основу постійного автоматичного моніторингу польотної ситуації.

Зміна профілю у разі несподіваних коливань погоди може призвести до різних наслідків. Може допускатися, що доти, поки обновлений профіль не виявляється під впливом нової небезпеки

чи конфлікту, існуючі небезпеки конфлікту не загострюються (прогнозування небезпеки конфлікту стає прогнозуванням конфлікту), це не потребує спеціального попередження.

Для визначення висоти й часу планованого прольоту контрольних пунктів маршруту в АС КПР виконується розрахунок просторово-часової траєкторії польоту (рис. 8.1) від вихідного пункту маршруту (ВПМ) через проміжні пункти маршруту (ППМ$_j$) до кінцевого пункту маршруту (КПМ).

Розрахунок траєкторії в АС КПР виконується двічі: на початку польоту, коли відповідний план польоту в пасивному стані, а потім, коли план активізується і переходить в активний стан (в АС КПР активізація виробляється автоматично приблизно за 25 хв до розрахункового часу вильоту, чи за 20 хв до розрахункового часу прольоту межі зони керування). У разі розрахунку траєкторії польоту для планів, що перебувають у пасивному стані, вплив вітру не враховується. Після активізації розрахунок траєкторії виконується з урахуванням метеорологічних даних про температуру повітря на висотах польоту, сили і напрямку вітру.

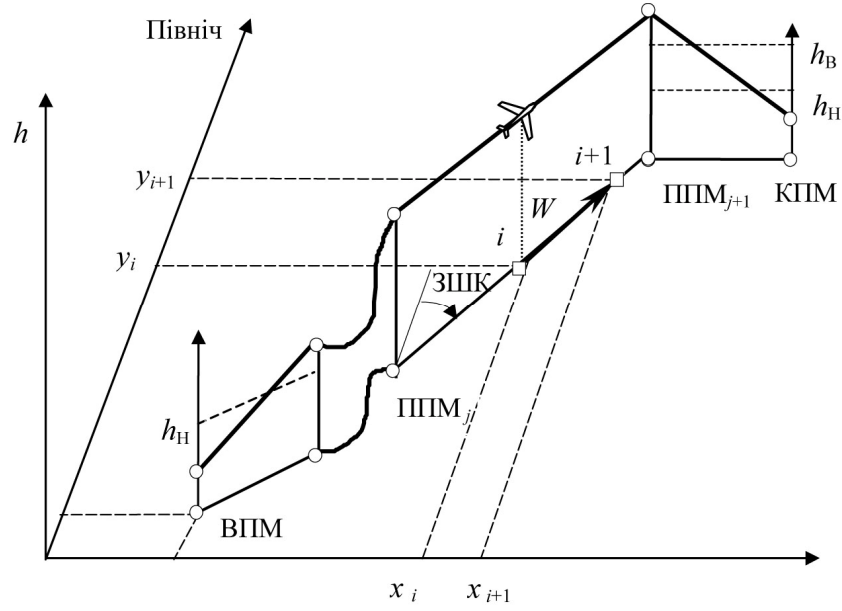

Рис. 8.1. Просторово-часовий профіль польоту

8.2. Математичні моделі для розрахунку просторово-часової траєкторії польоту

Розрахунок просторово-часової траєкторії польоту є імітацією в прискореному масштабі часу планованого польоту на підставі інформації, що надходить і зберігається в системі. Результатом цього розрахунку є значення висот і часу прольоту контрольних пунктів маршруту польоту.

8.2.1. Інформаційна база для розрахунку

Для розрахунку елементів плану польоту в АС КПР зберігається і використовується така інформація:

– параметри структури повітряного простору (сектори керування, географічні точки, пункти обов'язкового повідомлення, аеродроми, стандартні маршрути вильоту і прильоту, траси);

– льотно-технічні характеристики ПК (швидкопідйомність, швидкість зменшення швидкопідйомності зі збільшенням висоти, приладова швидкість на різних етапах зниження);

– банк кодів відповідачів;

– картографічна інформація;

– метеорологічні дані.

Різнотипні ПК, але з однаковими чи близькими за значеннями льотно-технічними характеристиками, групують за категоріями. Льотно-технічні характеристики (ЛТХ) для деяких категорій і типів літаків наведено в табл. 8.1.

Розрахунок траєкторії польоту виконують для трьох основних етапів (ділянок) польоту: набору висоти, польоту на постійній висоті (горизонтальний політ), зниження.

Для кожного етапу польоту застосовують відповідну методику розрахунку. Після цього виконується стикування ділянок. Процедура моделювання має ітеративний характер, що обумовлено залежністю параметрів, які впливають на траєкторію польоту ПК (температури повітря, висоти польоту, ЛТХ ПК), від місцеположення ПК, а також необхідністю точного стикування розрахованих ділянок польоту. У загальному вигляді ітеративну процедуру обчислення для якого-небудь вектора параметрів R описують виразом

$$R_i = f(R_{i-1}, T_i),$$

де T_i – час (крок) ітерації; R_i – значення вектора в поточний момент часу; $R_{i\text{-}1}$ – у попередній момент часу.

Таблиця 8.1

Льотно-технічні характеристики літаків

Категорія	Тип літака	Набір висоти					Горизонтальний політ		Зниження							
				нижній ПП		верхній ПП			нижній ПП			середній ПП			верхній ПП	
		$V_{н0}$, м/мін	k_{vh}	V_{ind}, км/год	$h_н$, м	Число Маха	V_{ind}, км/год	Число Маха	$V_{зн}$, м/мін	V_{ind}, км/год	$h_н$, м	$V_{зн}$, м/мін	V_{ind} км/год	$h_в$, м	$V_{зн}$, м/мін	Число Маха
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
11	Як-40	381	0,02	315	9999	–	500	–	500	343	4572	700	343	9999	–	–
12		762	0,02	370	9144	0,54	550	–	518	463	3048	838	518	7315	914	0,69
13	Іл-18	457	0,02	407	9999	0,00	600	–	396	463	9999	–	–	–	–	–
14	–	762	0,02	435	9999	0,00	660	–	610	463	9999	–	–	–	–	–
15	–	762	0,02	435	9999	0,00	680	0,64	610	463	9999	–	–	–	–	–
16	–	610	0,02	472	9144	0,66	700	–	396	407	1829	701	481	9999	–	–
17	–	610	0,01	472	9144	0,65	740	0,68	396	407	1829	701	481	9999	–	–
18	Ту-134	610	0,02	500	7620	0,71	780	0,72	305	389	1829	762	500	7620	610	0,71
19	–	610	0,02	500	7620	0,71	800	0,73	305	389	1829	762	500	7620	610	0,71
20	Як-42	610	0,02	537	10058	0,73	820	0,76	396	500	1829	914	537	7317	305	0,75
21	–	610	0,02	537	10058	0,73	840	0,77	396	500	1829	914	537	7315	305	0,75
22	Іл-76	610	0,02	574	8534	0,77	860	0,80	518	556	3048	610	611	7620	610	0,84
23	–	610	0,02	574	8534	0,77	870	0,81	518	556	3048	610	611	7620	610	0,84
24	Іл-86	670	0,02	593	8534	0.82	885	0,83	549	481	3353	914	593	8230	457	0,82
25	–	670	0,02	593	8534	0,82	900	0,84	549	481	3353	914	593	8230	457	0,82
26	Ту-154	762	0,03	594	9144	0,78	920	0,84	549	518	3048	914	611	7620	610	0,81

8.2.2. Горизонтальна ділянка польоту

Розрахунок координат положення будь-якого ПК у прямокутній системі координат *x, y* без урахування вітру виконують простим числовим інтегруванням (рис. 8.1):

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + s_\Delta \sin(\psi_3); \\ y_i &= y_{i-1} + s_\Delta \cos(\psi_3), \end{aligned} \tag{8.1}$$

де $s_\Delta = V\,T_i$; V – задана швидкість польоту; T_i – час дискретизації; ψ_3 – заданий шляховий кут.

Маршрут польоту можна задавати довжиною ділянок польоту і шляховим кутом ψ_3. Тоді для визначення координат точок траєкторії необхідно використовувати вираз

$$s_i = s_{i-1} + VT_i\,. \tag{8.2}$$

У табл. 8.1 залежно від висоти польоту задано або індикаторну (приладову) швидкість V_{ind} (км/год), або число Маха M. Тому для визначення істинної повітряної швидкості польоту потрібно застосовувати відповідні перерахункові формули.

Для обчислення істинної повітряної швидкості за індикаторної швидкістю використовують формулу

$$V = V_{ind}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\;k_{sh} \quad , \tag{8.3}$$

де ρ_0 – густина повітря на рівні моря за умови стандартної атмосфери ($P = 760$ мм рт. ст.; температура t =15°C); ρ – густина повітря на заданій висоті; k_{sh} – коефіцієнт, що враховує стискальність повітря.

Вираз $\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$ у формулі (8.3) апроксимується лінійною залежністю

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} = 1{,}00 + 0{,}000067\,h\ ,$$

де h – висота польоту, м.

У результаті вираз (8.3) для визначення істинної повітряної швидкості польоту набуває вигляду

$$V = (1{,}00 + 0{,}000067\,h)\,V_{ind}\,. \tag{8.4}$$

Стискальність повітря ураховують таким чином. Якщо істинна повітряна швидкість перевищує 320 м/с, то використовують апроксимацію

$$V' = 0{,}94V\,. \tag{8.5}$$

Якщо висота польоту перевищує 9000 м і швидкість польоту менша за 320 м/с, то

$$V' = 1{,}08V\,. \tag{8.6}$$

Для обчислення істинної повітряної швидкості за числом Маха використовують формулу

$$V = 20\sqrt{T}\,M, \tag{8.7}$$

де T – абсолютна температура на висоті польоту.

Для обчислення кореня квадратного використовують апроксимацію

$$\sqrt{T} = 8{,}0864 + 0{,}0308T\,,$$

у результаті якої вираз (8.7) набуває вигляду

$$V = 20(8{,}0864 + 0{,}0308T)M\,, \tag{8.8}$$

де V – повітряна швидкість, м/с.

У розрахунку навігаційних елементів польоту необхідно враховувати вітер (його напрямок і швидкість), який може створювати кут зносу (КЗ) і призводити до відхилення від лінії заданого шляху, запізнення, або завчасний проліт контрольної точки.

Для розрахунку траєкторії польоту використовують поняття еквівалентного вітру. Еквівалентний вітер – це умовний вітер, що збігається за напрямком з лінією заданого шляху і створює таку ж шляхову швидкість, як і фактичний вітер (рис. 8.2).

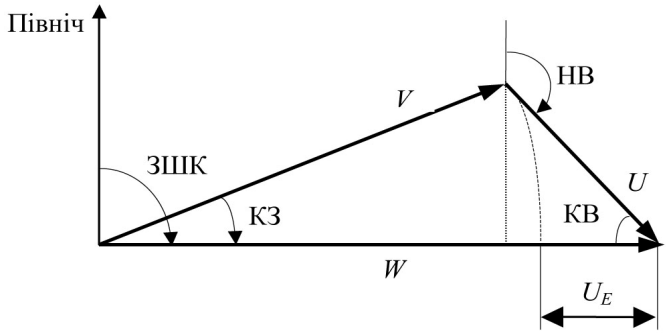

Рис. 8.2. Еквівалентний вітер

Еквівалентний вітер визначають за виразом

$$U_E = U\cos(\text{КВ}) - \left(\frac{U^2}{2V}\right)\sin^2(\text{КВ}), \qquad (8.9)$$

де КВ = НВ – ψ_3; U – швидкість вітру; НВ – навігаційний напрямок вітру.

Значення вітру і його напрямок заздалегідь записуються і зберігаються в масиві МЕТЕО.

Еквівалентний вітер зв'язаний зі шляховою швидкістю W співвідношенням

$$W = V + U_E, \qquad (8.10)$$

у той час, як для навігаційного трикутника швидкостей маємо векторне рівняння

$$\vec{W} = \vec{V} + \vec{U}.$$

Для визначення координат положення ПК з урахуванням вітру необхідно у формулах (8.1), (8.2) заздалегідь замінити істинну повітряну швидкість на шляхову, згідно з виразами (8.9), (8.10).

8.2.3. Ділянка набору висоти

Швидкість набору висоти визначають за швидкопідйомністю конкретного типу ПК. На її величину впливають висота польоту, стан атмосфери, завантаження ПК. Швидкопідйомність набору висоти визначають за формулою

$$V_{\text{н}} = V_{\text{н}_0}[1 - k_1 q(1 + k_2\Delta T)] - k_{vh}h, \qquad (8.11)$$

де $V_{\text{н}_0}$ – швидкість набору висоти на рівні моря за умови стандартної атмосфери і завантаження ПК, м/хв; h – висота польоту, м; k_{vh} – параметр, значення якого визначає зменшення швидкості набору висоти залежно від поточної висоти; ΔT – різниця температур між температурою на фактичній висоті польоту і температурою стандартної атмосфери, °С; q – завантаження ПК, %; $k_1 = 0{,}0079$; $k_2 = 0{,}0125$.

На етапі набору висоти весь повітряний простір розбивається на нижній й верхній повітряні простори, розділені встановленою межею

$h_{н,}$, яка залежить від типу ПК (рис. 8.3). У межах установленого повітряного простору ЛТХ, що використовуються для розрахунку для цього типу ПК, вважаються постійними (табл. 8.1). Для визначення різниці температур використовують інформацію про температуру в шарах атмосфери, що зберігається в масиві МЕТЕО.

Висоту польоту визначають з використанням співвідношення (8.11) ітеративною процедурою

$$h_i = h_{i-1} + V_{\text{Н}} T_i \ .$$

Горизонтальна складова швидкості польоту при наборі висоти

$$V_g = \sqrt{V^2 - V_{\text{Н}}^2} \ . \qquad (8.12)$$

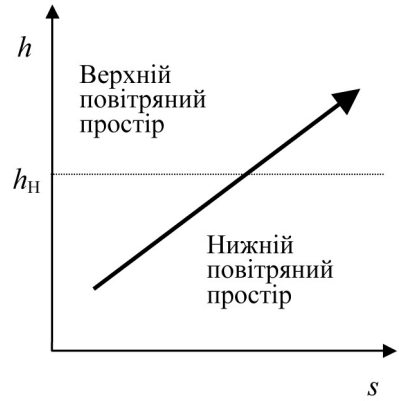

Рис. 8.3. Набрання висоти

Перш, ніж використовувати співвідношення (8.12), потрібно визначити істинну повітряну швидкість V, обчислення якої залежить від висоти польоту. Для нижнього повітряного простору для ділянки набору в масиві ЛТХ (табл. 8.1) задається індикаторна швидкість польоту V_{ind}, тому розрахунок V необхідно виконувати за формулами (8.4) – (8.6). При цьому швидкість збільшується зі збільшенням висоти польоту. Для верхнього повітряного простору задається число Маха і, отже, істинну повітряну швидкість потрібно обчислювати за формулою (8.8). При цьому швидкість польоту зменшується зі збільшенням висоти польоту.

Горизонтальна складова швидкості польоту V_g дозволяє визначити координати місцеположення ПК у горизонтальній площині, використовуючи рекурентний вираз $s_i = s_{i-1} + V_g T_i$.

8.2.4. Ділянка зниження

Розрахунок елементів траєкторії польоту на етапі зниження виконують за таких припущень.

Повітряний простір у вертикальній площині розбивають на три висотні шари (рис. 8.4), що задаються межами $h_{\text{Н}}$, $h_{\text{В}}$.

Кожному типу ПК для конкретного висотного шару задають відповідні ЛТХ у масиві ЛТХ (табл. 8.1). Ці характеристики в межах заданого висотного шару вважають постійними. Для розрахунку висоти польоту задають швидкість зниження $V_{ЗН}$. На підставі ЛТХ визначають істинну повітряну швидкість польоту відповідно до формули (8.4) чи (8.8), а потім обчислюють горизонтальну складову швидкості польоту

$$V_g = \sqrt{V^2 - V_{ЗН}^2} \ .$$

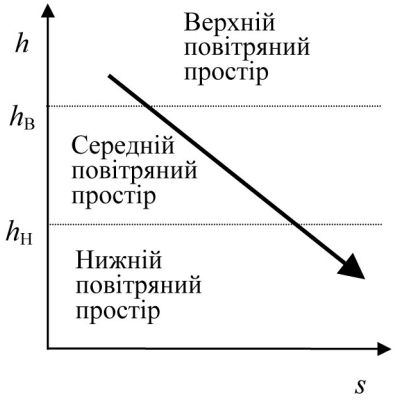

Рис. 8.4. Зниження

Координати місцеположення ПК у заданий момент часу в горизонтальній і вертикальної площинах визначають з виразів:

$$h_i = h_{i-1} - V_{ЗН} T_i \ ;$$

$$s_i = s_{i-1} + V_g T_i \ .$$

8.2.5. Ділянка розвороту

За умови виконання розвороту по дузі кола постійного радіуса з постійною швидкістю можна використовувати таку модель руху літака. Для постійного кута крену γ, з яким ПК виконує розворот, радіус віражу визначають виразом

$$R = \frac{V^2}{g \operatorname{tg}\gamma},$$

де V – швидкість польоту; g – прискорення вільного падіння.

У разі дискретного подання процесу розвороту для моделювання на комп'ютері необхідно розрахувати зміну координат місцеположення за час дискретизації. Виконуючи розворот по дузі кола, літак за час дискретизації T_i розгорнеться на кут (рис. 8.5)

$$\Delta\psi = \operatorname{sgn}(\psi_р)\frac{VT_i}{R},$$

де $\operatorname{sgn}(\cdot)$ – функція «знак числа», що визначає напрям віражу; $\psi_р = (\psi_З^{j+1} - \psi_З^j)$ – глибина розвороту; j – номер ділянки маршруту.

Якщо в точці i проекції лінійної швидкості на осі координат дорівнювали $V_x(i), V_y(i)$, то після розвороту на кут $\Delta\psi$ вони стануть такими:

$$\begin{aligned} V_x(i+1) &= V_x(i)\cos\Delta\psi + V_y(i)\sin\Delta\psi; \\ V_y(i+1) &= V_y(i)\cos\Delta\psi - V_x(i)\sin\Delta\psi. \end{aligned} \tag{8.13}$$

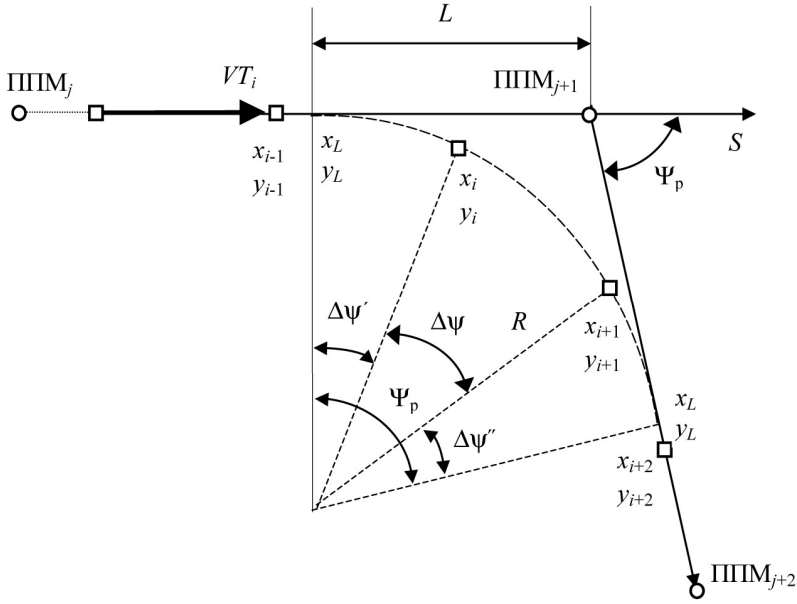

Рис. 8.5. Розрахунок траєкторії на ділянці повороту

При цьому координати нового положення визначаться з виразів:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= x(i) + [V_x(i+1) + V_x(i)]T_i / 2; \\ y(i+1) &= y(i) + [V_y(i+1) + V_y(i)]T_i / 2. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Для остаточного розрахунку просторово-часової траєкторії польоту необхідне стикування різних ділянок маршруту.

8.3. Сполучення розрахованих профілів польоту

Залежно від конфігурації маршруту польоту, ЛТХ ПК, вітрового і температурного впливів атмосфери можливі різні варіанти стикування розрахованих ділянок горизонтального польоту, набору висоти і зниження.

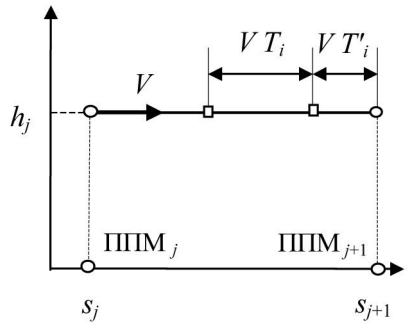

Рис. 8.6. Стикування точок траєкторії у горизонтальному польоті

8.3.1. Горизонтальна ділянка польоту

На прямолінійній ділянці польоту ітеративну процедуру розрахунку положення ПК провадять відповідно до формул (8.1), (8.2) доти, доки не буде зафіксовано факт прольоту чергової контрольної точки. У разі стикування останній крок ітерації завжди менший або дорівнює заданому $T'_i \le T_i$ (рис. 8.6).

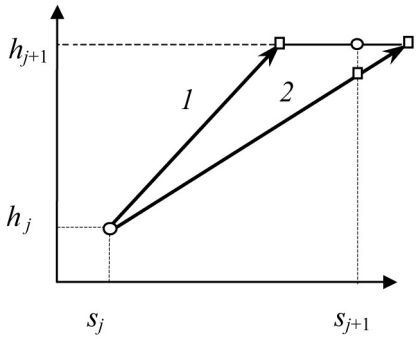

Рис. 8.7. Стикування точок траєкторії у наборі висоти

8.3.2. Ділянка набору висоти

Для набору висоти польоту можливі два варіанти:

1) ПК досягає заданої висоти прольоту чергової контрольної точки раніше від прольоту цієї точки (рис.8.7, крива *1*);

2) ПК не встигає досягти заданої висоти прольоту чергової контрольної точки (рис.8.7, крива *2*).

8.3.3. Ділянка зниження

Процедура стикування для розрахунку етапу зниження залежить від того, яка точка траєкторії фіксується: точка початку чи точка закінчення зниження.

Для фіксування точки початку зниження можливі два варіанти:

1) ПК досягає заданої висоти прольоту чергової контрольної точки раніше від прольоту цієї точки (рис.8.8, крива *1*);

2) ПК не встигає досягти заданої висоти прольоту чергової контрольної точки (рис.8.8, крива *2*).

Для фіксування точки закінчення зниження, наприклад під час посадки, також можливі два варіанти:

1) зниження має розпочатися після прольоту контрольної точки (рис.8.9, крива *1*);

2) зниження має розпочатися до прольоту контрольної точки (рис.8.9, крива *2*).

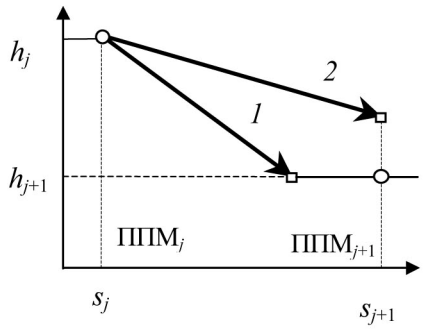

Рис. 8.8. Стикування точок траєкторії для зниження до заданої висоти

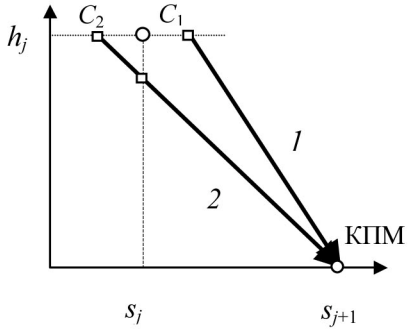

Рис. 8.9. Стикування точок траєкторії для зниження до фіксованої точки

За фіксованої точки закінчення зниження ПК не можна заздалегідь вказати точку початку зниження C_1 або C_2 . Цю точку можна знайти тільки в результаті зустрічного розрахунку траєкторії польоту в прямому й зворотному напрямах.

Таким чином, за наявності ділянки зниження з фіксованою точкою закінчення зниження розрахунок траєкторії польоту потрібно виконувати в зворотному порядку, тобто виявляти, починаючи з кінця маршруту польоту, усі ділянки польоту зі зниженням, розраховувати для них траєкторії зниження і запам'ятовувати координати отриманих точок ітерацій, враховуючи при цьому максимальну довжину траєкторії зниження. Потім розрахунок виконувати у прямому напрямку, починаючи з вихідної точки маршруту польоту, і в міру просування аналізувати майбутній етап зниження, вибір точки початку зниження і далі вибір усієї траєкторії руху, що заздалегідь розрахована і збережена в пам'яті.

Для визначення довжини траєкторії зниження (максимальної кількості точок ітерацій), потрібної для розрахунку, збереження і

наступного стикування з іншими ділянками польоту, треба виконати додатковий аналіз. Найпростіший випадок зображено на рис. 8.9 (крива *1*), де закінчення розрахунку траєкторії зниження визначається точкою C_1.

У загальному випадку аналіз точки початку зниження C_2 може виявитися більш складним, якщо етап зниження захоплює кілька контрольних точок. У цьому разі розрахунок продовжують доти, доки:

– траєкторія зниження між двома контрольними точками j-2 і j-1 не досягне висоти, що дорівнює найбільшій висоті прольоту цих точок $\max(h_{j-2}, h_{j-1})$;

– траєкторія зниження виявиться вище від заданої висоти прольоту контрольної точки j-2 за умови, що задана висота прольоту контрольної точки j-3 не буде перевищувати заданої висоти прольоту над точкою j-2.

Якщо зазначені умови не виконуються, то потрібно перейти до їх перевірки на наступних ділянках польоту.

8.3.4. Ділянка розвороту

Під час розвороту виникає завдання стикування ділянки маневрування з прямолінійними ділянками польоту, якщо момент початку розвороту не збігається з точкою дискретизації траєкторії (див. рис. 8.5).

Розрахункову точку початку розвороту (лінійне попередження розвороту (ЛПР)) визначають відповідно до виразу

$$L = R\, tg\left|\frac{\psi_{\text{р}}}{2}\right|.$$

Момент початку розвороту контролюється за пройденою відстанню

$$S^j - (s_{i-1}^j + VT_i) \le L, \qquad (8.15)$$

де S^j – довжина ділянки з номером j.

Розрахункові моменти початку й закінчення розвороту можуть не збігатися з модельованими моментами дискретизації.

Алгоритм стикування ділянок прямолінійного польоту і розвороту такий. За строгого виконання нерівності (8.15), тобто в разі

розбіжності точки початку розвороту і точки дискретизації обчислюють:

– час прольоту до розрахункової точки початку розвороту

$$\Delta t' = [(S^j - L) - s_{i-1}^j] / V ;$$

– кут розвороту на першу точку на дузі

$$\Delta\psi' = \mathrm{sgn}(\psi_\mathrm{p})[V(T_i - \Delta t') / R] ;$$

– координати першої точки на дузі відповідно до виразів (8.13), (8.14) із попередньою заміною:

$$\begin{aligned} &x(i-1) = x_L ; \qquad y(i-1) = y_L ; \\ &V_x(i-1) = V_{xL} ; \quad V_y(i-1) = V_{yL} ; \\ &\Delta\psi = \Delta\psi' ; \qquad T_i = T_i' - \Delta t' , \end{aligned} \tag{8.16}$$

де x_L, y_L – розрахункові координати точки ЛПР; V_{xL}, V_{yL} – складові швидкості в точці ЛПР.

Для контролю закінчення розвороту необхідно обчислювати кут розвороту в поточній точці дискретизації

$$\psi(i) = \psi(i-1) + \Delta\psi .$$

Сума, що збільшується, порівнюється з глибиною розвороту

$$\left|\psi(i)\right| \geq \left|\psi_\mathrm{p}\right| .$$

За строгої нерівності сполучення ділянок виконують у такий спосіб. Обчислюють:

– залишок кута розвороту $\Delta\psi'' = \left|\psi_\mathrm{p}\right| - \left|\psi(i-1)\right|$;

– залишок часу польоту по дузі $\Delta t'' = \Delta\psi'' R / V$;

– час польоту на новій ділянці до точки дискретизації $(T_i - \Delta t'')$;

– координати першої точки дискретизації на новій прямолінійній ділянці x_{i+2}, y_{i+2} з попередньою заміною в точці x_L, y_L аналогічно формулам (8.16).

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Моделюючи процеси планування, необхідно чітко уявляти технологію складання плану польотів і його контролю, інформаційну базу процесу планування, форму подання елементів плану.

Робота диспетчера зі складання добового плану й контроль його виконання в неавтоматизованих системах планування являє собою рутинну операцію, потребує опрацювання великої кількості документації, її сортування, архівації, подання у вигляді списків, таблиць. При цьому виникає проблема, пов'язана з людським чинником – помилками введення інформації, порушеннями технології виконання тих чи тих операцій і т. ін. Під час контролю і забезпечення виконання плану польотів найбільші труднощі виникають під час опрацювання і складання телеграм.

В автоматизованих системах планування повітряного руху автоматизуються операції приймання і форматно-логічного контролю повідомлень; сортування повідомлень; заповнення електронних бланків телеграм і передачі їх споживачам; відображення таблиці проекту і підсумкового зведеного добового плану польотів; розмноження добового плану; формування банку даних; відображення довідкової, метеорологічної і допоміжної інформації.

Найбільш формалізований і автоматизований в системі КПР – процес розрахунку поточного плану польотів і контролю його виконання.

Питання для самоперевірки

1. Яке призначення системи планування повітряного руху?
2. Назвіть види й етапи планування повітряного руху.
3. Що складає інформаційну базу попереднього і добового планування?
4. Що складає інформаційну базу поточного планування?
5. Які елементи просторово-часової траєкторії розраховують при поточному плануванні в АС КПР?
6. Укажіть особливості моделювання траєкторії польоту для різних етапів польоту.
7. Як у розрахункових математичних моделях враховують ЛТХ і метеорологічну інформацію?
8. Які елементи планової інформації відображаються в АС КПР?

9. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ ПОВІТРЯНОГО РУХУ ЯК СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

9.1. Характеристики системи масового обслуговування

Системи масового обслуговування – це клас математичних систем, розроблених у теорії масового обслуговування для формалізації процесів функціонування систем, призначених для обслуговування якихось подій (заявок, вимог).

Чимало процесів, що відбуваються в системі КПР, відповідає класичному визначенню СМО.

Основними компонентами СМО є вхідні потоки заявок, що обслуговує система, черги заявок, прилади (канали, лінії) обслуговування, вихідні потоки.

Основне завдання теорії масового обслуговування – визначення кількісних показників функціонування СМО і їх залежностей від параметрів вхідного потоку та структури системи (її складу, функціональних зв'язків).

Загальною особливістю завдань, пов'язаних з СМО, є випадковий характер досліджуваних явищ.

Прилад обслуговування (П), що складається з нагромаджувача заявок (Н) та каналу обслуговування заявок (К), зображено на рис 9.1.

У нагромаджувача може одночасно перебувати $l = \overline{0, L}$ заявок, де L – ємність нагромаджувача. На кожен елемент приладу обслуговування надходять потоки подій: у нагромаджувач надходить потік заявок λ , а в канал – потік обслуговувань u. На виході приладу формується вихідний потік обслугованих заявок y .

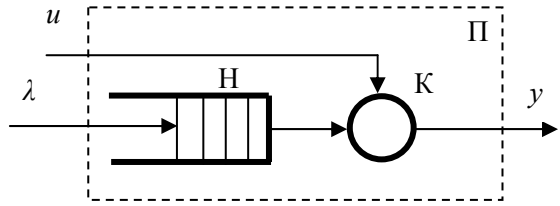

Рис. 9.1. Схема обслуговуючого приладу

Вхідний потік визначається характером фізичних процесів, що перебігають у СМО.

Для вирішення завдань теорії масового обслуговування необхідно передусім уміти аналізувати потоки заявок. Потоки можуть мати різну структуру й інтенсивність. Потоки розділяють на однорідні й неоднорідні, випадкові й регулярні, стаціонарні й нестаціонарні, ординарні й неординарні, без післядії, з обмеженою післядією і з післядією загального виду.

Потік подій однорідний, якщо він характеризується тільки моментами надходження цих подій. Неоднорідний потік характеризується додатковим набором ознак.

Регулярним називають потік, у якому події випливають одна за одною через строго визначені проміжки часу.

Потік називають стаціонарним, якщо ймовірність надходження визначеної кількості вимог протягом визначеного відрізка часу залежить від його величини і не залежить від початку його відліку на осі часу, тобто не залежить від того, де саме на осі часу розміщено цей відрізок.

Потік є ординарним, якщо ймовірність улучення на елементарну ділянку двох і більше подій дуже мала порівняно з імовірністю влучення однієї події. Це означає практичну неможливість появи двох і більше вимог у той самий момент часу.

Потік подій називають потоком без післядії, якщо для будь-яких непересічних ділянок часу кількість подій, що потрапляють на одну із них, не залежить від кількості подій, що потрапляють на інші. Відсутність післядії припускає взаємну незалежність перебігу процесу в інтервалах часу, які між собою не перекриваються.

Потоком з обмеженою післядією називають потік, для якого проміжки часу між послідовними подіями являють собою незалежні випадкові величини.

Потік, що має три основні властивості (стаціонарність, відсутність післядії й ординарність), називають найпростішим.

Обслуговуюча система характеризується структурними характеристиками та дисциплінами очікування й обслуговування. За складом СМО поділяють на системи з одним обслуговуючим приладом (одноканальні) і з багатьма приладами обслуговування

(багатоканальні). Багатоканальні системи можуть складатися з однотипних і різнотипних приладів. Канал може обслуговуватись за один етап (за одну фазу) чи за кілька етапів (багатофазні системи). Значного поширення набула класифікація СМО за часом перебування вимог у системі до початку обслуговування: системи з відмовою, системи з необмеженим часом очікування і системи змішаного типу.

Систему масового обслуговування називають системою з відмовою (втратою), якщо заявка, що надійшла в момент, коли всі канали зайняті, негайно одержує відмову і залишає систему (губиться).

За наявності вільних каналів можна розглядати різні алгоритми розподілу заявок по каналах: строгий (невипадковий) чи випадковий (хаотичний) розподіл по вільних каналах.

Систему масового обслуговування називають системою з очікуванням, якщо заявка, що застала всі канали зайнятими, стає в чергу і чекає, поки не звільниться який-небудь канал. Якщо час очікування в черзі необмежений, то система є «чистою системою з очікуванням». Якщо час обмежений якимись умовами, то систему називають «системою змішаного типу».

Одна з найважливіших характеристик СМО – час обслуговування $t_{\text{об}}$.

Найбільш часто досліджують такі показники функціонування СМО:

– імовірність втрати вимоги (відмова обслуговування): $P_{\text{відм}}$;

– імовірність того, що обслуговуванням вимог у системі зайнято k приладів: P_k;

– середню кількість зайнятих приладів (каналів), що характеризує ступінь завантаження системи: $N_{\text{З}} = \sum_{k=1}^{n} kP_k$;

– середню кількість вільних каналів: $N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k$;

– коефіцієнт простою приладів: $K_{\text{п}} = \frac{N_0}{n}$;

– коефіцієнт зайнятості устаткування: $K_з = \frac{N_з}{n}$;

– середній час очікування в черзі за наявності *n* приладів: $\bar{t}_{оч} = \int_0^\infty t\, dP(t_{оч} > t)$, де $P(t_{оч} > t) = \sum_{k=0}^{n} P_k P_k(t_{оч} > t)$; $P_k(t_{оч} > t)$ – умовна ймовірність того, що час чекання $t_{оч} > t$ за умови, що в момент надходження вимог у системі вже обслуговувалися *k* вимог;

– імовірність того, що час перебування в черзі не буде тривати більше визначеного: $P(t_{оч} < t) = \sum_{k=n}^{\infty} P_k P_k(t_{оч} < t)$;

– середню довжину черги: $Q = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) P_k$ якщо $k \geq n$, де P_k – імовірність того, що в системі міститься *k* вимог;

– середню кількість вимог, що перебувають у системі: $E = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = Q + N_з$;

– імовірність того, що кількість вимог у черзі більша від деякої кількості: $P(k > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k$.

Для оцінювання ефективності СМО можна використовувати також вартісні показники: вартість обслуговування заявки; вартість втрат через чергу; вартість збитків через відмову обслуговування; вартість одиниці часу простою СМО; вартість експлуатації приладів СМО.

Суть імітаційного моделювання СМО на комп'ютері полягає в такому:

– складають алгоритми, за допомогою яких формуються потоки вхідних вимог із заданими характеристиками;

– моделюють процеси, що перебігають у СМО;

– багаторазово відтворюють процеси обслуговування;

– отримані результати статистично обробляють для визначення показників ефективності СМО.

9.2. Моделювання випадкових потоків подій

У переважній кількості завдань, особливо прикладного характеру, розглядають пуассонівський потік, що має властивості ординарності і відсутності післядії. Стаціонарний пуассонівський потік називають найпростішим. Імовірність надходження k вимог за проміжок часу t у такому потоці задається формулою Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

де λ – щільність потоку вимог.

Зокрема, імовірність того, що за час t не відбудеться жодної події, буде $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

У найпростішому потоці інтервали часу τ між двома сусідніми подіями розподілено за показовим законом з параметром λ, тобто $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$.

Властивість стаціонарного пуассонівського потоку дозволяє розробити досить простий алгоритм моделювання. Для цього задають момент надходження першої заявки t_1, а потім, послідовно задаючи випадковим чином значення інтервалів часу τ_i, розподілених за показовим законом, визначають моменти надходження наступних заявок:

$$t_2 = t_1 + \tau_1; \quad t_3 = t_2 + \tau_2; \quad \ldots t_{i+1} = t_i + \tau_i. \qquad (9.1)$$

Приклад 9.1. Скласти вираз для моделювання інтервалів часу між подіями в найпростішому потоці.

Для моделювання випадкової величини, що відповідає інтервалам часу і розподілена за показовим законом, можна використовувати метод обернених функцій. Відповідно до цього методу процедура перетворення рівномірно розподілених на інтервалі (0,1) випадкових чисел r_i у випадкові числа τ_i із заданим показовим законом розподілу зводиться до розв'язання щодо τ_i рівняння (3.3):

$$\int_{-\infty}^{\tau_i} f(\tau)d\tau = r_i \qquad \text{чи} \qquad \int_{-\infty}^{\tau_i} \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = r_i \ .$$

Після обчислення інтеграла одержимо $1-e^{-\lambda\tau_i}=r_i$. Розв'язуючи це рівняння щодо τ_i, визначимо $\tau_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-r_i)$ або з огляду на те, що випадкові числа $(1-r_i)$ мають також рівномірний закон розподілу на інтервалі (0,1), $\tau_i=-\frac{1}{\lambda}\ln r_i$.

Потоком Пальма є потік з обмеженою післядією, у якому інтервали часу $\tau_1,\tau_2,\ldots$ між послідовними подіями являють собою незалежні випадкові величини з щільністю розподілу $f(\tau_i)$. Стаціонарний пуассонівський потік (найпростіший потік) є окремим випадком стаціонарного потоку Пальма, у якому інтервали часу між сусідніми подіями розподілені за показовим законом.

Щільність розподілу першого інтервалу визначають за формулою

$$f_1(\tau_1)=\lambda\left[1-\int_0^{\tau_1}f(\tau)d\tau\right]=\lambda\left[1-F(\tau_1)\right], \qquad (9.2)$$

де $\lambda=\left[\int_0^{\infty}\tau f(\tau)d\tau\right]^{-1}$.

Процедура моделювання стаціонарного потоку Пальма із заданою щільністю розподілу інтервалів $f(\tau)$ аналогічна процедурі моделювання пуассонівського потоку (9.1):

– спочатку за формулою Пальма (9.2) визначають щільність розподілу першого інтервалу $f_1(\tau_1)$;

– використовуючи один з методів моделювання випадкової величини, за заданою щільністю $f_1(\tau_1)$ знаходять значення першого інтервалу τ_1;

– визначають момент появи першої події $t_1=t_0+\tau_1$;

– моделюють послідовність τ_i випадкових величин, що відповідають заданій щільності розподілу $f(\tau)$ інтервалів часу між подіями і визначають моменти появи подій у потоці $t_i=t_{i-1}+\tau_i,\quad i\geq 2$.

Потік Ерланга є потоком з обмеженою післядією, що випливає з розрідження найпростішого потоку. Потік Ерланга *k*-го порядку виходить, якщо в потоці залишається кожна *k*-та подія, а інші відкидаються. Інтервали між подіями визначають як суму сусідніх інтервалів вихідного найпростішого потоку подій. Щільність розподілу інтервалів у потоці Ерланга *k*-го порядку визначають виразом

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0 .$$

За досить великого *k* потік Ерланга можна вважати приблизно нормальним з математичним сподіванням $\frac{k}{\lambda}$ і дисперсією $\frac{k}{\lambda^2}$.

Аналізуючи потоки літаків, розрізняють потоки літаків на трасах і в районах аеродромів як за властивостями, так і за структурою.

Численні статистичні дослідження показують, що потік літаків на ділянці траси досить добре описується випадковим одновимірним точковим процесом пуассонівського типу. Якщо розглядати потік літаків на трасах як суперпозицію потоків літаків на окремих ешелонах, то на певних інтервалах часу такий потік має властивості: стаціонарність, ординарність й відсутність післядії. Результати досліджень показують, що для малих інтервалів часу (до 15 хв) гіпотеза про пуассонівський розподіл справедлива також для потоків літаків на окремих ешелонах. Однак для потоків літаків на ешелонах умова відсутності післядії не виконується.

9.3. Моделювання обслуговуючих систем

Моделюючи обслуговуючу систему, потрібно описати, крім структури системи, також алгоритм її функціонування, що являє собою набір правил поведінки заявок у системі в різних неоднозначних ситуаціях. Неоднорідність заявок враховується за допомогою введення класів пріоритетів.

Для деяких типів СМО дуже складно виконувати аналітичне розв'язання задач, пов'язаних з їх функціонуванням. Так, нестаціонарна фаза навіть для найпростіших систем потребує складних математичних методів.

Теоретичні висновки й аналітичні вирази можуть бути незру-

чними для розв'язання прикладних задач. Розрахунки значно спрощуються за припущення, що процеси в СМО є марковськими.

На практиці інтерес становить випадок, коли величина часу обслуговування заявок $t_{об}$ має показовий розподіл

$$f(t_{об}) = \mu e^{-\mu t_{об}}, \qquad (t_{об} > 0),$$

де μ – величина, обернена середньому часу обслуговування однієї заявки: $\mu = 1/m_{t_{об}}$; $m_{t_{об}} = M[t_{об}]$.

Теоретичні результати дослідження СМО зазвичай потребують експериментальної перевірки. Точність числових оцінок залежить передусім від цілей дослідження й адекватності математичного опису системи, а також від обраних показників ефективності, їх взаємозв'язку. Ефективним методом дослідження й оцінювання числових параметрів СМО є статистичне моделювання. Суть методу статистичного моделювання полягає в побудові для процесу функціонування досліджуваної системи деякого моделювального алгоритму, що імітує поведінку системи і взаємодію елементів системи з урахуванням випадкових вхідних впливів і впливів зовнішнього середовища, і реалізації цього алгоритму на комп'ютері.

Розглянемо алгоритм моделювання простої одноканальної СМО, схему якого показано на рис. 9.2.

Мета моделювання – оцінювання ймовірності відмови й імовірності обслуговування заявок.

У блоці 2 формуються випадкові послідовні моменти t_i надходження заявок на обслуговування відповідно до заданої щільності $f(\tau)$ розподілу інтервалів τ між заявками.

Блок 4 перевіряє зайнятість каналу обслуговування із надходженням чергової i-ї заявки.

Якщо заявка, що надійшла, застає канал вільним, то фіксується час початку оброблення, що дорівнює часу надходження заявки (блок 5) і керування передається на блок 8, що формує випадковий час $\tau_{об}$ обслуговування цієї заявки відповідно до заданої щільності $f_{об}(\tau_{об})$ часу обслуговування.

У блоці 10 обчислюється час $t_{зв}$ звільнення системи після обслуговування i-ї заявки, що надійшла.

Блок 12 підраховує кількість обслугованих заявок J.

Якщо заявка, що надійшла, застала канал зайнятим (блок 4),

то вона стає в чергу, при цьому керування передається на блок 3, де формується час очікування $\tau_{оч}$.

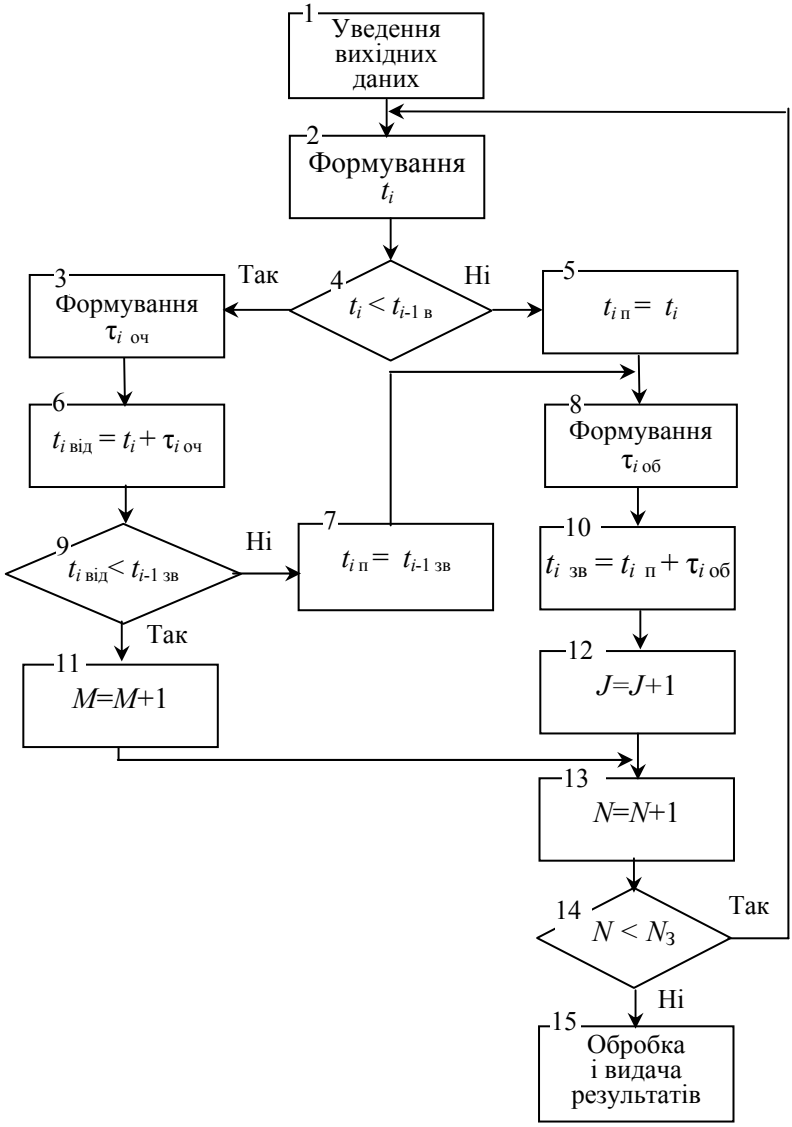

Рис. 9.2. Схема алгоритму моделювання одноканальної СМО

Якщо час очікування випадковий, то він формується відпові-

дно до заданої щільності $f_{оч}(\tau_{оч})$.

У блоці 6 розраховується момент часу $t_{від}$, до якого заявка може перебувати в стані очікування обслуговування, після чого одержує відмову.

Можливість обслуговування чи відмови аналізується в блоці 9 через порівняння розрахованого моменту часу $t_{від}$ з моментом звільнення системи після обслуговування попередньої (i-1)-ї заявки.

Якщо система не звільняється до моменту $t_{від}$, то фіксується факт відмови заявки в лічильнику відмов M (блок 11).

Якщо система встигає звільнитися, то заявка знімається з очікування і надходить на обробку, при цьому в блоці 7 установлюється час початку обробки нової заявки, що дорівнює часу звільнення системи від попередньої заявки, і керування передається на блок 8.

У блоці 13 підраховується загальна кількість N заявок, що надійшли в систему.

Блок 14 контролює закінчення моделювання для заданої кількості заявок $N_З$.

Обробка результатів моделювання (блок 15) полягає в оцінюванні ймовірності обслуговування заявок $P_{об} = \dfrac{J}{N_З}$ і ймовірності відмови $P_{від} = \dfrac{M}{N_З}$.

Аналогічним чином можна побудувати алгоритм моделювання багатоканальної СМО. Однак він ускладнюється через потребу алгоритмізувати правило вибору каналу обслуговування.

9.4. Моделювання системи оперативного керування повітряним рухом як системи масового обслуговування

Для оперативного керування повітряним рухом прийняття рішень покладається на диспетчера радіолокаційного керування. Літаки, що перебувають під керуванням у секторі відповідальності диспетчера, виходять на зв’язок із диспетчером КПР у деякі моменти часу, обумовлені правилами виконання польотів. Якщо літак входить у сектор, передбачається настроювання його приймача і передавача на

частоту диспетчера. При цьому всі літаки, що перебувають у секторі, прослуховують переговори диспетчера, але виходять на зв'язок з ним по черзі, крім екстрених випадків. Диспетчер також є ініціатором радіозв'язку, передаючи на борт команди керування або запитуючи навігаційну інформацію.

Пропускна здатність сектора КПР залежить від оперативності керування, що визначається часом очікування сеансу радіозв'язку екіпажа з диспетчером. Навантаження каналу зв'язку визначається кількістю літаків, що перебувають одночасно в секторі. Ця кількість літаків N в загальному випадку випадкова і залежить від розмірів сектора, інтенсивності повітряного руху, швидкості літаків, точності витримування запланованих параметрів польоту.

Систему оперативного КПР із каналом радіозв'язку «земля – борт» можна подати як одноканальну СМО замкненого типу, що приймає заявки на обслуговування від кінцевої кількості джерел – N літаків (рис. 9.3). Заявка може бути в системі на обслуговуванні чи в черзі, або поза системою «на підході». Кожен літак як джерело заявок діє незалежно один від одного, і кожний з них породжує заявки з частотою λ .

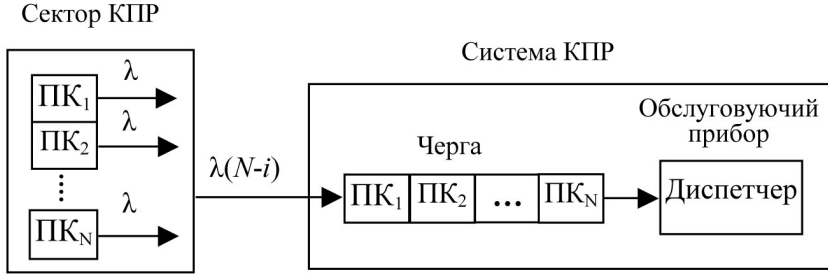

Рис. 9.3. Подання системи оперативного КПР як СМО

Отже, частота повернення заявок у систему дорівнює λ і, якщо є i заявок, то середня інтенсивність надходження заявок на обслуговування дорівнює

$$\lambda(N-i), \qquad 0 \le i \le N .$$

Зі збільшенням довжини черги інтенсивність надходження заявок зменшується.

Час обслуговування $\tau_{об}$ заявок і інтервал часу τ між їх над-

ходженнями – це випадкові величини із середніми значеннями $\overline{\tau}_{об}$ та $\overline{\tau}$. Припускається, що вони розподілені за показовим законом

$$f(\tau_{об}) = \mu e^{-\mu\tau_{об}} \quad , \qquad f(\tau) = \lambda\, e^{-\lambda\tau}$$

з інтенсивністю обслуговування $\mu = \dfrac{1}{\overline{\tau}_{об}}$ та інтенсивністю надходження $\lambda = \dfrac{1}{\overline{\tau}}$.

Граф станів такої моделі оперативної системи КПР як СМО для заданого числа N показано на рис. 9.4. На графі позначено стани: S_0 – радіозв'язок не ведеться з жодним літаком; S_1 – один літак на зв'язку, другій очікує; S_2 – один літак на зв'язку, два інші очікують; S_N – один літак на зв'язку, інші N-1 очікують.

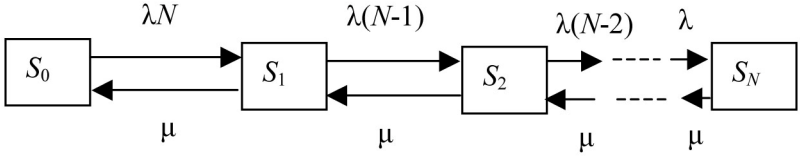

Рис. 9.4. Граф станів оперативної системи КПР

Зі стану S_0 до стану S_1 систему переводить потік заявок від усіх літаків. Інтенсивність цього потоку дорівнює λN. Зі стану S_1 до S_2 переводить уже зменшений потік $\lambda(N\text{-}1)$ і т.д.

Інтенсивність переходу системи зі стану до стану у зворотному напрямку μ однакова. Вона визначається середньою тривалістю сеансу зв'язку (часом обслуговування) $\overline{\tau}_{об}$ і не залежить від довжини черги.

Для визначення ймовірності P_i перебування системи в тому або тому стані S_i можна скористатися теорією марковських ланцюгів для процесу «загибелі і розмноження», що аналогічний зображеному на рис. 9.4 графу.

На практиці обмежуються визначенням граничних імовірностей, що знаходять із системи алгебричних рівнянь. Ці рівняння складаються для кожного стану S_i таким чином, щоб сума добутків інтенсивностей вихідних потоків на ймовірність P_i дорівнювала б сумі добутків інтенсивностей вхідних потоків на ймовірності

станів, з яких вони надходять.

Для стану S_0

$$(\lambda N)P_0 = \mu P_1 . \qquad (9.3)$$

Для стану S_1

$$\mu P_1 + (\lambda(N-1))P_1 = (\lambda N)P_0 + \mu P_2 ;$$

це рівняння можна спростити урахуванням рівності (9.3):

$$\lambda(N-1)P_1 = \mu P_2 .$$

У загальному випадку для станів S_i і S_{i-1} вираз для співвідношень між імовірностями записують як

$$\lambda_{i-1,i} P_{i-1} = \lambda_{i,i-1} P_i ,$$

де $\lambda_{i-1,i}$ – інтенсивність потоку, що переводить систему зі S_{i-1} стану до стану S_i, а $\lambda_{i,i-1}$ – навпаки.

Для розглянутої моделі

$$\lambda(N-i)P_{i-1} = \mu P_i .$$

Отриману систему алгебричних рівнянь розв'язують послідовно. Спочатку з першого рівняння (9.3) визначають імовірність

$$P_1 = \frac{\lambda N}{\mu} P_0 ,$$

потім імовірність

$$P_2 = \frac{\lambda(N-1)}{\mu} P_1 = \frac{N(N-1)\lambda^2}{\mu^2} P_0 \qquad \text{і т.д.;}$$

$$P_N = \frac{(N(N-1)(N-2)\ldots 1)\,\lambda^N}{\mu^N} P_0 .$$

Імовірність P_0 визначають з очевидної нормувальної умови

$$P_0 + P_1 + \ldots P_N = 1 . \qquad (9.4)$$

Після підстановки виразів для $P_1, P_2, \ldots, P_N$ одержимо

$$P_0 = \frac{1}{1 + N\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + N(N-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(N(N-1)(N-2)\ldots 1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N} .$$

Оскільки кількість джерел заявок (літаків у секторі КПР) є

випадковою, то ймовірності умовні.

Імовірність того, що в системі не буде жодної заявки за умови перебування в секторі N літаків:

$$P(0 \mid N) = \left[1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{N!}{(N-i)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \right]^{-1}.$$

Умовна ймовірність того, що в системі буде i заявок (на обслуговуванні й у черзі)

$$P(i \mid N) = \frac{N!}{(N-i)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i P(0 \mid N).$$

Для визначення безумовних імовірностей перебування системи в позначених станах необхідно знати ймовірність $P(N)$ перебування в секторі N літаків:

$$P_0 = P(0 \mid N) P(N);$$

$$P_i = P(i \mid N) P(N).$$

Імовірність $P(N)$ може бути задана узагальненим показником σ, що характеризує структуру повітряного простору, розміри сектора й інтенсивність руху:

$$\sigma = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \bar{t}_{ij},$$

де λ_{ij} і $\bar{t}_{ij}$ – інтенсивність і середній час польоту на j-му ешелоні та i-й ділянці траси, що входить у сектор.

Припустивши, що потоки літаків підкоряються пуассонівському розподілу, ймовірність того, що в секторі перебуває N літаків, визначають з виразу

$$P(N) = \frac{\sigma^N}{N!} e^{-\sigma}.$$

Покажемо методику визначення довжини черги і часу очікування обслуговування (перебування в черзі), що є показниками оперативності радіозв'язку в секторі.

У розглянутій моделі системи КПР допускається черга необмеженої довжини, тобто всі заявки обслуговуються.

Виходячи з опису системи, ймовірність того, що заявка, що надійшла, стане в чергу, дорівнює

$$1 - P(0 \mid N) - P(1 \mid N).$$

У загальному випадку довжину черги можна визначити з виразу

$$Q_N = \sum_{i=2}^{N} iP(i \mid N).$$

Відомий простіший спосіб визначення довжини черги. Її можна визначити як різницю між середньою кількістю заявок у системі E й середньою кількістю заявок, що перебувають на обслуговуванні

$$Q_N = E - \sum_{i=1}^{N} P(i \mid N) = E - [1 - P(0 \mid N)]. \qquad (9.5)$$

Середню кількість заявок у системі визначають через пропускну здатність системи

$$C = [1 - P(0 \mid N)]\mu,$$

що дорівнює середній кількості заявок, що надходять за одиницю часу $(N - E)\lambda$, тобто

$$[1 - P(0 \mid N)]\mu = (N - E)\lambda.$$

Виділивши з цього виразу E й підставивши у вираз (9.5), маємо

$$Q_N = N - \frac{\mu + \lambda}{\lambda}[1 - P(0 \mid N)].$$

Середнє абсолютне значення довжини черги визначають так:

$$\overline{Q}_N = \sum_{N=1}^{\infty}\left[N - \frac{\mu + \lambda}{\lambda}[1 - P(0 \mid N)]\right].$$

Для знаходження середнього часу очікування (перебування в черзі) необхідно знайти середню абсолютну інтенсивність надходження заявок, що визначається за відомим значенням ймовірностей перебування системи в кожному стані з виразу

$$\overline{\lambda} = \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}(N - i)\lambda P(i \mid N)P(N).$$

Середній час очікування $\bar{t}_{\text{оч}} = \dfrac{\overline{Q}}{\overline{\lambda}}$.

Для практичного застосування поданих виразів потрібно замінити нескінченну границю суми на деяке кінцеве число $N_{\max}$, що залежить від узагальненого показника σ. Для середнього розміру сектора КПР достатнім може бути значення $N_{\max}$ = 25 – 30 літаків.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Моделюючи систему КПР як СМО, диспетчера КПР розглядають як прилад обслуговування, а процес керування літаками – як реалізацію випадкової послідовності окремих подій, що надходять на обслуговування. Кожна подія (наприклад, вхід літака в сектор КПР, команда екіпажу на зміну режиму польоту, початок і закінчення маневру і т. ін.) приводить до ряду операцій, які диспетчер виконує відповідно до технології його роботи.

Для дослідження СМО можна використовувати як аналітичне, так і імітаційне (статистичне) моделювання.

У разі аналітичного моделювання процес функціонування елементів системи чи всієї системи записують у вигляді рівнянь, що описують зміну ймовірностей перебування системи у певних станах. Показники СМО визначають аналітично із застосуванням апарата теорії масового обслуговування.

Центральним завданням статистичного моделювання СМО є моделювання випадкових потоків подій. Якщо задається характеристика потоку, то суть моделювання полягає у формуванні випадкових значень інтервалів часу між подіями, що послідовно надходять, розподіленими відповідно до заданого закону розподілу, і в обчисленні моментів надходження цих подій.

Особливістю статистичного моделювання системи КПР як СМО є те, що потік подій породжується моделлю польотної ситуації і залежить від ряду вхідних чинників. До цих чинників належать параметри повітряного простору й потоків літаків, технологія роботи диспетчера та ін. Кожну подію, яка генерується, повинен обслуговувати диспетчер. У разі неможливості обслуговування виникає черга.

Для оцінювання якості процесів КПР використовують імовірнісні, часові й операційні критерії, що дозволяють оцінити ступінь завантаженості диспетчера КПР, його пропускну здатність

виконувати операції з обслуговування літаків.

Імовірнісні критерії – імовірність того, що диспетчер зайнятий обслуговуванням; імовірність наявності черги; імовірність своєчасного виконання операції; імовірність безпомилкового виконання операції.

Часові критерії – середній період безупинної зайнятості; середнє перебування в черзі і їх дисперсії.

Операційні критерії – середня кількість виконаних операцій; середня довжина черги операцій.

Питання для самоперевірки

1. Наведіть основні характеристики СМО.
2. Наведіть основні характеристики обслуговуючих систем.
3. Опишіть основні статистичні характеристики випадкових потоків.
4. Складіть узагальнений алгоритм моделювання випадкового потоку.
5. Які принципи покладено в основу імітаційних моделей СМО?
6. Які особливості застосування методу статистичного моделювання для дослідження системи КПР як СМО?
7. Наведіть узагальнену методику статистичного моделювання системи КПР як СМО.
8. Дайте визначення пропускної здатності СМО.
9. Поясніть нормувальну умову (9.4).
10. У чому полягає правило опису ймовірностей стану процесу «загибелі й розмноження»?
11. Як інтенсивність надходження заявок і час обслуговування впливають на характеристики СМО? Що відбудеться, якщо середній час обслуговування дорівнюватиме середньому часу інтервалу між заявками?

10. МОДЕЛЮВАННЯ В СИСТЕМІ ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЩОДО КЕРУВАННЯ ПОВІТРЯНИМ РУХОМ

10.1. Функції системи підтримання прийняття рішень у процесі керування повітряним рухом

Під час оперативного контролю і керування повітряним рухом диспетчеру КПР потрібно створювати і підтримувати образ екстрапольованого чотирьох координатного 4D повітряного руху на основі його досвіду й іншої досить нечіткої евристичної інформації. Виконуючи це, диспетчер повинен подумки порівнювати кожну пару прогнозованих траєкторій для того, щоб визначити, чи розійдеться пара літаків без порушення мінімуму дозволеного розділення літаків, і визначити чи потрібно йому втручатися і яким способом усунути потенційний конфлікт.

Тому велике значення приділяється системам підтримки прийняття рішення щодо автоматизації моніторингу і запобігання конфліктним ситуаціям з високою достовірністю прогнозування, своєчасним виявленням небезпечного зближення літаків, високою точністю оцінки характеристик конфліктів і запобігання їм з гарантованим рівнем безпеки в умовах підвищеної щільності польотів, високої динамічності відносного руху літаків у широкому спектрі можливих ситуацій повітряного руху.

Дію системи підтримки прийняття рішень під час керування повітряним рухом можна подати у вигляді послідовної циклічної схеми (рис. 10.1):

1) оцінювання параметрів траєкторії руху за даними системи спостереження;

2) контроль витримування заданого безконфліктного плану (заданої траєкторії) польоту;

3) прогнозування положення ПК на заданий час;

4) виявлення потенційно конфліктних ситуацій;

5) оцінювання характеристик конфліктної ситуації;

6) знаходження рішень щодо розв’язання конфліктної ситуації;

7) вибір і прийняття рішення щодо запобігання конфліктній ситуації;

8) контроль виконання маневру із запобігання конфліктній ситуації.

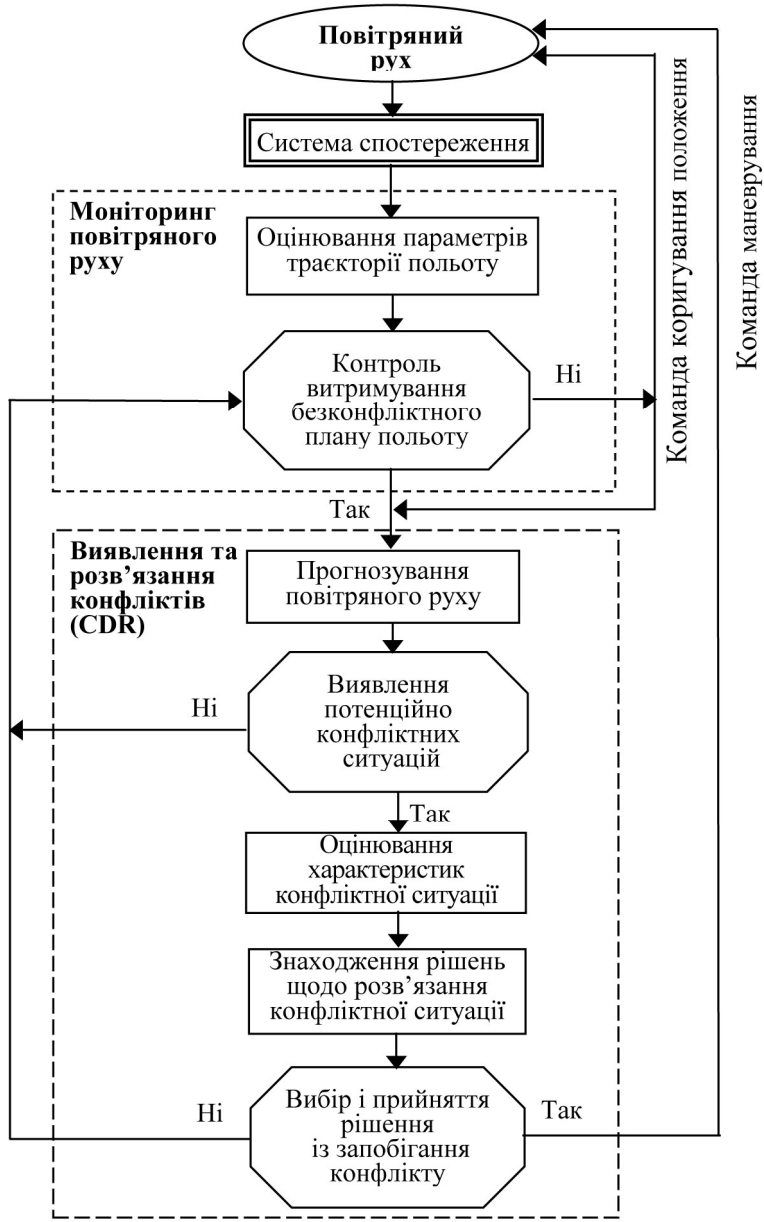

Рис. 10.1. Функції системи підтримання прийняття рішень під час КПР

Циклічність процесу підтримання прийняття рішень забезпечується поєднанням контролю виконання маневру із запобігання конфліктній ситуації (п. 8) з контролем витримування заданого безконфліктного плану (заданої траєкторії) польоту (п. 2).

Пункти 1 і 2 відображають функції системи моніторингу траєкторій літаків, які є невід'ємною складовою усіх сучасних АС КПР.

Решта пунктів – це функції системи виявлення та розв'язання конфліктних ситуацій (CDR – conflict detection and resolution).

У разі впровадження нових концепцій з організації повітряного руху, таких як Cooperative ATM (кооперативне КПР), Gate to Gate («від перону до перону»), Free Flight («вільній політ») виявляються нові якості системи КПР.

Концептуальну структуру системи підтримання прийняття рішень для організації кооперативного КПР показано на рис. 10.2. Вона являє собою адаптивну систему прийняття рішень на базі інформації про керування і наміри. В ній установлюється взаємодія математичної моделі, що описує рух літака, інформації бортової системи керування польотом, системи передавання даних, бази даних і бази знань, людино-машинного інтерфейсу, системи спостереження, системи оброблення траєкторної інформації.

Основу системи складає математична модель керованого руху літака. Вона містить блок, що реалізує динаміку польоту, блок, що імітує реальні закони керування, а також модель навігаційних датчиків, що забезпечує інформацією для формування сигналів керування відповідно до заданого способу навігації і режиму польоту. Вибір відповідного закону траєкторного керування здійснюється з бази даних системи керування польотом FMS (Flight Management System) для відповідного типу літака. Ця база даних міститься в наземному компоненті системи.

За наявності цифрової лінії зв'язку «диспетчер–пілот» CPDLC (Controller – Pilot Data Link Communication) інформація про реальний режим польоту, способи навігації і використовувані закони керування може надходити безпосередньо з бази даних комп'ютера бортової системи керування польотом. Без лінії зв'язку зазначена інформація може вибиратися з наземної частини бази даних, наприклад, на підставі повідомлень екіпажа.

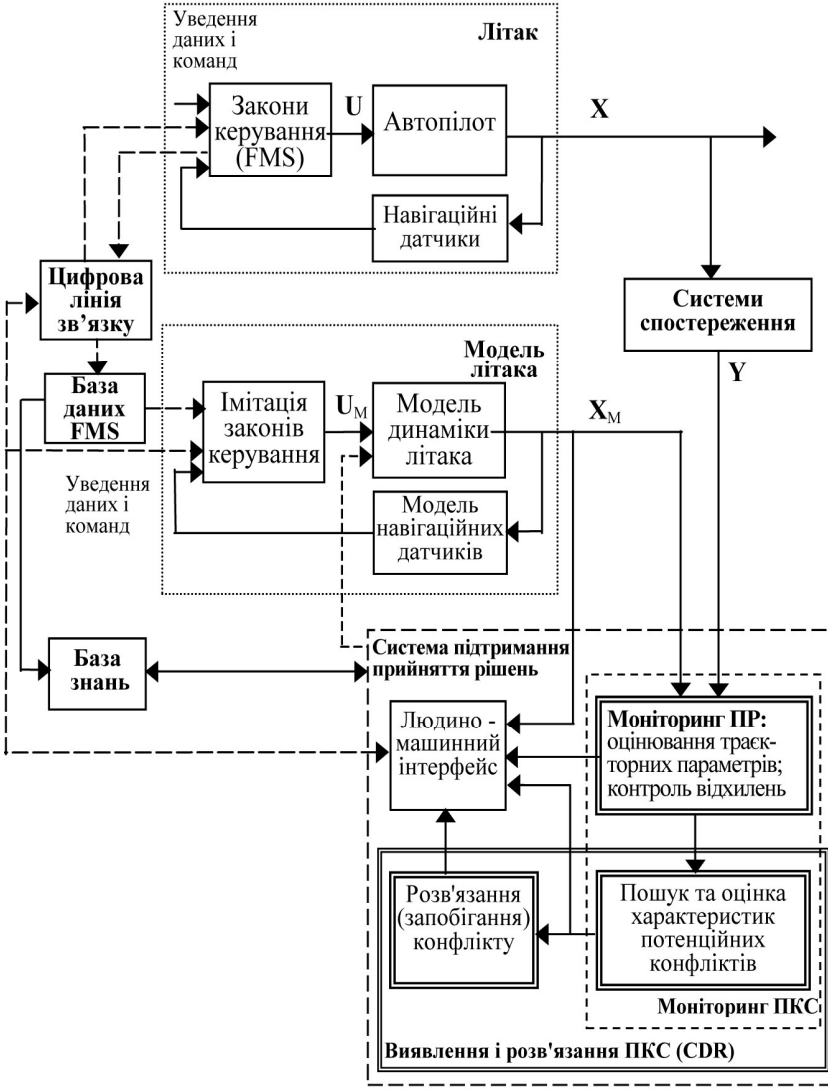

Рис. 10.2. Структура системи підтримання прийняття рішення за кооперативного КПР:
ПКС – потенційно-конфліктна ситуація;
ПР – повітряний рух

Параметри траєкторії польоту ПК $\mathbf{Y}$, що спостерігаються, виміряються системою спостереження і порівнюються зі «спостережуваними» компонентами вектора станів $\mathbf{X}_{\text{М}}$ моделі польоту.

Для надійного контролю повітряного руху в умовах кооперативного КПР потрібні більш досконалі методи супроводу траєкторій і відповідний моніторинг повітряного руху, щоб контролювати узгоджені траєкторії, відхилення від заданої програми польоту, перевіряти параметри і закони керування, прийняті для поточного фрагменту польоту.

Підсистема моніторингу потенційно конфліктних ситуацій включає блок моніторингу повітряного руху і блок пошуку, виявлення і оцінки конфліктів.

Після того як потенційно конфліктну ситуацію виявлено, виконується розв'язання (запобігання) конфлікту. Цей блок спільно з блоком пошуку конфліктів складають традиційну підсистему виявлення і розв'язання конфліктів (CDR).

Вся оброблена траєкторна інформація надходить в систему підтримання прийняття рішень (DSS – Decision Support System). Туди ж у разі потреби надходить інформація з бази знань (knowledge base), у якій зберігається опис конфліктних ситуацій, що були в минулому, і способи розв'язання.

У центрі системи підтримання прийняття рішень міститься людино-машинний інтерфейс (HMI), на який заводиться вся оброблена траєкторна вимірювальна інформація, моделювальна інформація та інша інформація, потрібна для прийняття рішення диспетчером. Тут є достатньо невирішених проблем, пов'язаних з аналізом ситуацій і прийняттям рішень в умовах невизначеності.

У системі підтримання прийняття рішення весь час відстежується траєкторія польоту; при цьому математична модель адаптується до реального процесу польоту, по суті повторюючи траєкторію руху реального літака. Це стає можливим завдяки появі властивості керованості у моделях, що дозволяє вирішити завдання ідентифікації відхилення від планованої (заданої) траєкторії, спричиненими похибками навігації і вітром. Крім того, це дозволяє ідентифікувати і настроювати параметри моделі.

Для реалізації найвищого рівня автоматизації процесу контролю і керування польотом передбачається передавання за допо-

могою цифрової лінії зв'язку на борт у систему керування польотом (FMS) сигналів керування для усунення відхилень ПК від заданих параметрів траєкторії польоту, а також керування по траєкторії, що формується в комп'ютері наземної системи КПР. Це дозволить забезпечити керування літаком у критичних ситуаціях у разі неможливості виконувати штатне керування на борту (наприклад, через нещасний випадок з екіпажем під час аварії, чи через несанкціоноване втручання в дію екіпажу і т. ін.).

Нові якості кооперативної системи КПР дозволяють розробляти методи виявлення і вирішення конфліктних ситуацій, що ґрунтуються на доступній інформації про план і режим польоту. Такі методи виявлення конфлікту використовують чинний план польоту як основу для прогнозування траєкторії і виявлення конфлікту.

Прогнозування траєкторій польоту ґрунтується на доступній інформації про умови польоту, льотно-технічних характеристик літака, наміри пілота і стан атмосфери (метеорологічні дані).

Запропонований підхід, заснований на адаптивних моделях, значно підвищує точність траєкторного прогнозування і зменшує невизначеність щодо оцінювання майбутнього положення літаків.

Результатом вирішення завдання щодо запобігання конфлікту в загальному випадку – це не одна траєкторія, а множина траєкторій. Нова траєкторія, що розрахована для заданого літака, має бути безконфліктною в межах деякого часового інтервалу. Крім того, цю траєкторію має реалізовувати літак з урахуванням обмежень його власних динамічних можливостей. Властивість керованості і наявність динаміки в моделях, спроможних адаптуватися до реальної ситуації польоту, задовольняють ці вимоги.

Для автоматизованого керування траєкторія розв'язання конфлікту може бути обрана з множини траєкторій відповідно до обраного критерію оптимізації.

10.2. Попередження небезпечного зближення літаків в системі керування повітряним рухом

Одне з головних завдань диспетчера КПР – забезпечити дотримання норм ешелонування для кожного учасника повітряного руху. Норми ешелонування можна подати геометрично у вигляді захисного об'єму, побудованого навколо ПК, параметрами якого є

чинні в цій зоні відповідальності норми ешелонування для кожного ПК (вертикальне, поздовжнє і бічне). Тоді конфліктна ситуація визначається як влучення в захисний об'єм контрольованого ПК інших учасників повітряного руху.

Велике значення в системах запобігання конфліктам (Collision Avoidance System – CAS) має вибір критерію виявлення конфлікту. Широко відома концепція попередження часу – «тау» критерій, що характеризує час, який залишається до максимального зближення літаків. В основі лежить визначення найменшої відстані між двома конфліктуючими літаками (Closest Point of Approach – CPA). Знаючи CPA визначається місце, де прогнозується мінімальна відстань, і час польоту, що залишився до цієї точки.

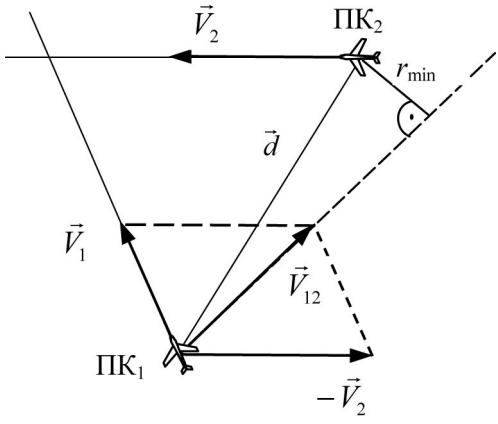

Рис. 10.3. Зближення літаків у просторі

У загальному випадку, якщо рух двох ПК – ПК$_1$ і ПК$_2$ – у просторі задано векторами швидкостей $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$ (рис. 10.3), то максимальне зближення літаків (відстань розходження) визначають з виразу

$$r_{\min} = \frac{\vec{V}_{12} \times \vec{d}}{V_{12}},$$

де $\vec{V}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ – вектор відносної швидкості.

Час досягнення максимального зближення визначається формулою

$$t_{\min} = \frac{1}{V_{12}} \sqrt{d^2 - r_{\min}^2}\ .$$

За умови постійних швидкостей літаків час t_{CPA}, коли відбудеться максимальне зближення літаків, може бути визначено також з виразу

$$t_{CPA} = t_0 + t_{\min} = t_0 - \frac{\vec{d}_0^{\mathrm{T}}\,\vec{V}_{12}}{\vec{V}_{12}^{\mathrm{T}}\,\vec{V}_{12}},$$

де t_0 – час початку аналізу; $\vec{d}_0$ – вектор відстані між літаками в момент часу t_0 .

Тоді вектор відстані між літаками у момент часу t_{CPA} можна визначити за формулою

$$\vec{d}_{\min} = \vec{d}_0 + (t_{CPA} - t_0)\vec{V}_{12},$$

а мінімальне значення відстані дорівнює

$$r_{CPA} = \| \vec{d}_{\min} \|.$$

Прогнозований конфлікт визначається, якщо значення r_{CPA} менше від встановленої мінімально допустимої відстані $d_{\text{доп}}$ (норми ешелонування) між літаками, тобто

$$r_{CPA} \le d_{\text{доп}}.$$

В АС КПР застосовуються алгоритми попередження конфліктів, що мають декілька тестів перевірки можливості появи конфліктів. При цьому тести розробляють з урахуванням мінімізації часу обчислення і таким чином, щоб результати кожного тесту використовувалися у наступних тестах.

Приклад такого алгоритму. Вихідними даними для алгоритму є радіолокаційні вимірювання місцеположення літаків, а також дані про висоту польоту, що надходять від вторинного радіолокатора. Після вторинної обробки цих даних в АС КПР визначаються координати місцеположення літаків x, y, z у прямокутній системі координат і складові швидкості польоту $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Для кожного літака провадиться перевірка. Спочатку для обраного літака визначають швидкість відносного кута курсу відносно інших літаків (рис. 10.4):

$$\dot{\theta} = \frac{(x_{\text{ref}} - x_1)(\dot{y}_{\text{ref}} - \dot{y}_1) - (y_{\text{ref}} - y_1)(\dot{x}_{\text{ref}} - \dot{x}_1)}{(x_{\text{ref}} - x_1)^2 + (y_{\text{ref}} - y_1)^2}.$$

Тут індекс «1» відповідає літаку, що перевіряється, а індекс «ref» – літаку, відносно якого провадиться перевірка.

Якщо швидкість зміни кута наближається до нуля, то це свідчить про можливість зіткнення літаків. У цьому разі виконується подальше тестування. Обчислюється час до точки найбільшого зближення літаків:

$$T_{CPA} = \frac{(x_{\text{ref}} - x_1)(\dot{x}_{\text{ref}} - \dot{x}_1)}{(\dot{x}_{\text{ref}} - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_{\text{ref}} - y_1)^2 + (\dot{z}_{\text{ref}} - \dot{z}_1)^2} +$$

$$+ \frac{(y_{\text{ref}} - y_1)(\dot{y}_{\text{ref}} - \dot{y}_1) - (z_{\text{ref}} - z_1)(\dot{z}_{\text{ref}} - \dot{z}_1)}{(\dot{x}_{\text{ref}} - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_{\text{ref}} - \dot{y}_1)^2 + (\dot{z}_{\text{ref}} - \dot{z}_1)^2}.$$

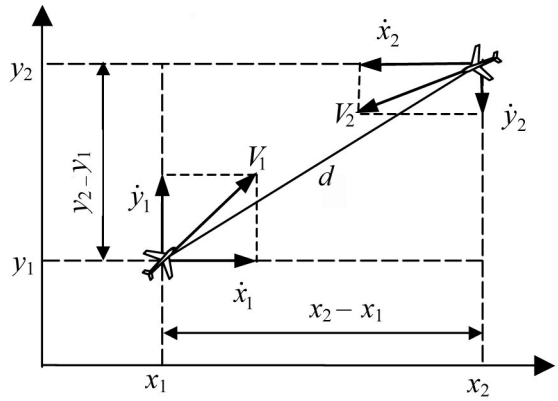

Рис. 10.4. Визначення загрози небезпечного зближення літаків в АС КПР

Якщо цей час перевищує заданий в системі час, то розглянуте вище тестування повторюється на наступному огляді РЛС. Якщо менше, то тоді провадиться перевірка за висотою відповідно до формули

$$z_{\min} = (z_{\text{ref}} - z_1) + (\dot{z}_{\text{ref}} - \dot{z}_1) T_{CPA},$$

де $z_{\min}$ – різниця висот між літаками в прогнозований момент часу.

Якщо різниця висот більша від установленого в системі допустимого значення, то ця пара літаків знімається з подальшої перевірки. Якщо різниця висот менша за допустиме значення $z_{\min} \le z_{\text{доп}}$, то провадиться перевірка відстані між літаками в горизонтальній площині відповідно до формули (ця перевірка провадиться також за відсутності інформації про висоту):

$$d^2_{\min} = [(x_{\text{ref}} - x_1) + (\dot{x}_{\text{ref}} - \dot{x}_1)T_{CPA}]^2 + [(y_{\text{ref}} - y_1) + (\dot{y}_{\text{ref}} - \dot{y}_1)T_{CPA}]^2,$$

де $d_{\min}$ – відстань між літаками в горизонтальній площині в прогнозований момент часу їх найбільшого зближення.

Якщо обчислене значення $d_{\min} \le d_{\text{доп}}$ менше від установленого в системі безпечного допустимого значення, то генерується сигналізація, що попереджає диспетчера про небезпечне зближення літаків.

10.3. Системи попередження зіткнення літаків

Забезпечення безпеки польотів вимагає тісної взаємодії системи КПР із керованими ПК. При цьому необхідно брати до уваги наявність і особливість роботи бортових систем запобігання зіткненням.

Бортову систему запобігання зіткненню (БСЗЗ) (ACAS – Airborne Collision Avoidance System) призначено для підвищення повітряної безпеки і діє як засіб «останньої надії» для запобігання зіткненням і небезпечним зближенням між ПК у повітрі.

10.3.1. Виявлення небезпечного зближення літаків у системі попередження зіткнень

У бортових системах запобігання зіткненням використано геометричні методи виявлення конфліктів. Конфлікт вважається виявленим, якщо прогнозована мінімальна відстань між літаками стає меншою за допустиме задане значення. Аналіз провадиться роздільно в горизонтальній і вертикальній площинах.

Небезпека зіткнення двох літаків, що виконують прямолінійний політ з постійними швидкостями на одній висоті, виявляється в результаті розв'язання так званого «трикутника зустрічі» (рис. 10.5).

Відстань між літаками визначають за виразом

$$d(t) = \left(V^2_{\text{від}} t^2 - 2d_0 V_{\text{збл}} t + d_0^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (10.1)$$

де $V_{\text{від}} = \left(V_1^2 - 2V_1V_2\cos\varphi + V_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$ – відносна швидкість літаків; $V_{\text{збл}} = V_1\cos\theta_1 - V_2\cos(\theta_1 + \varphi)$ – швидкість зближення, яка дорів-

нює складовій відносної швидкості, спрямованої уздовж лінії, що з'єднує літаки; θ_1 – пеленг другого літака відносно напрямку польоту першого; φ – відносний курс; d_0 – відстань між літаками в початковий момент часу $t = 0$.

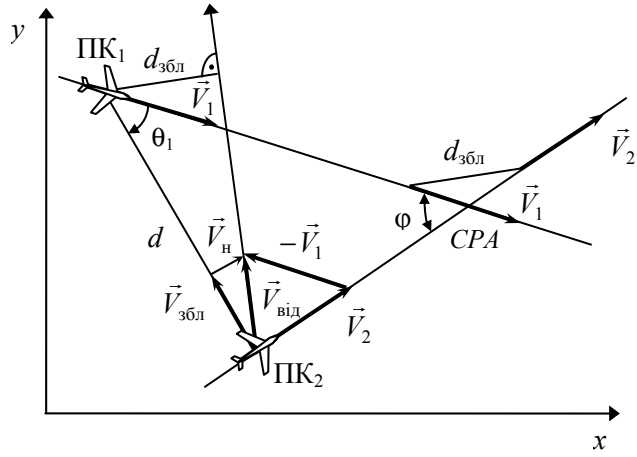

Рис. 10.5. «Трикутник зустрічі»

Час до найбільшого зближення $t_{збл}$ визначають диференціюванням рівняння (10.1) і дорівнянням до нуля

$$t_{збл} = d_0 V_{збл} / V_{від}^2 . \qquad (10.2)$$

Відстань між літаками $d_{збл}$ у момент найбільшого зближення знаходять підстановкою виразу для $t_{збл}$ (10.2) у вираз (10.1):

$$d_{збл} = d_0 V_н / V_{від}^{1/2},$$

де $V_н$ – складова відносної швидкості, спрямованої перпендикулярно до лінії, що з'єднує літаки:

$$V_н = V_2 \sin(\theta_1 + \varphi) - V_1 \sin\theta_1 .$$

На практиці виявляти зближення треба задовго до моменту реально можливого зіткнення. У цьому випадку $d >> d_{збл}$, і час до найбільшого зближення $t_{збл}$ обчислюють, використовуючи апроксимацію

$$t_{\text{збл}} \approx \tau = \frac{d}{V_{\text{збл}}} = -\frac{d}{\dot{d}}. \qquad (10.3)$$

При цьому різниця між часом $t_{\text{збл}}$ і часом τ установлюється виразом

$$\tau = t_{\text{збл}} + \frac{d_{\text{збл}}^2}{V_{\text{від}}^2 t_{\text{збл}}} \quad \text{або} \quad \tau = t_{\text{збл}} \left(1 - \frac{d_{\text{збл}}^2}{d^2}\right)^{-1}.$$

Простим часовим критерієм виявлення небезпечного зближення літаків є «тау» критерій для виразу (10.3), коли умовою виявлення погрози небезпечного зближення є виконання нерівності

$$\tau \le \tau_{\text{кр}}, \qquad (10.4)$$

де $\tau_{\text{кр}}$ – заданий час, необхідний для виконання маневру запобігання зіткненню.

Недоліком «тау» критерію є те, що здебільшого $d_{\text{збл}} \neq 0$, і, отже, у міру наближення до точки найбільшого зближення виникає помилка, яка тим більша, чим більше значення $d_{\text{збл}}$.

Інший недолік критерію виявляється в разі повільного зближення літаків, коли згідно з рівняннями (10.3), (10.4) спрацьовує сигналізація загрози, у той час, як безпечну відстань між літаками забезпечено.

Для усунення зазначених недоліків розроблено модифікації «тау» критерію, де вводиться поріг спрацьовування за дальністю d_m, що залежить від рівня чутливості. Модифікований критерій

$$\tau = -\frac{d - d_m}{\dot{d}} \le \tau_{\text{кр}}. \qquad (10.5)$$

Для того щоб забезпечити своєчасне виявлення небезпечного зближення в тому випадку, якщо літак, що загрожує, летить з постійним прискоренням a, необхідно мати додатковий запас відстані $d_a = \frac{a\tau_{\text{кр}}^2}{2}$. Модифікований критерій (10.5), по суті, враховує прискорення $a \le \frac{2d_m}{\tau^2}$.

10.3.2. Бортова система запобігання зіткненню TCAS

Практичною реалізацією концепції ACAS є система TCAS (Traffic Conflict Alert System). Ця система функціонує автономно і незалежно від будь-якого бортового навігаційного устаткування і наземних систем.

У процесі роботи TCAS безупинно «спостерігає» за повітряним простором навколо літака, на якому цю систему встановлено, роблячи активні запити і приймаючи відповіді на ці запити від відповідачів інших літаків, що можуть являти собою загрозу.

Робота TCAS II ґрунтується на двох основних принципах:

– час попередження, що ґрунтується на часі польоту (а не на відстані) до точки найбільшого зближення (*CPA*);

– рівень чутливості, що є функцією від висоти і визначає рівень захисту через установлення більш високих граничних величин для вищих діапазонів висот.

Навколо літака формуються «захищений об'єм» повітряного простору – «зона зіткнення», покликана захистити літак від вторгнення в неї інших літаків. Якщо прогнозується таке вторгнення, то екіпаж інформують про це засоби візуального і мовного оповіщення.

Одночасно формуються ще два об'єми повітряного простору – «зона попередження» (TA) і «зона підвищеної уваги» (RA). Ці зони показано на рис. 10.6 в горизонтальній і вертикальній площинах.

Оскільки систему побудовано за принципом обчислення часу до можливого зіткнення, то розміри і форма зон автоматично змінюються залежно від швидкості зближення з конфліктуючим літаком, взаємного напрямку руху і висоти польоту: $t_{TA} = 20 - 48$ с; $t_{RA} = 15 - 35$ с; $L_{TA} = 3{,}3$ милі; $L_{RA} = 2{,}1$ милі; $L = 20$ миль.

В TCAS II версії 7.0: $\Delta H_{TA} = 850$ футів; $\Delta H_{RA} = 700$ футів.

У версії 6.4: $\Delta H_{TA} = 1200$ футів; $\Delta H_{RA} = 850$ футів.

Для усунення помилкової тривоги в разі повільного зближення літаків встановлюють: $L_{TA} = 1{,}3$ милі; $L_{RA} = 1{,}1$ милі.

TCAS може видавати два типи інформації:

– консультативну інформацію про повітряний рух (TA – Traffic Advisory);

– рекомендації із запобігання загрозі зіткнення (RA – Resolution Advisory).

Інформація типу TA – попередження екіпажу про можливу видачу інформації типу RA і надання допомоги у візуальному пошуку.

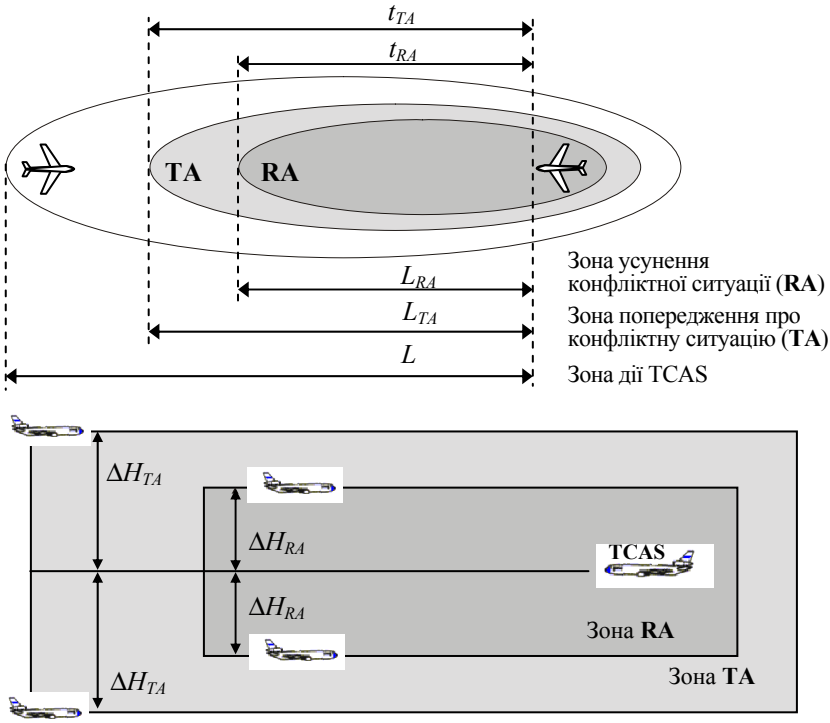

Рис. 10.6. Принцип організації попередження зіткнень в TCAS

Інформація типу RA – маневри ухилення у вертикальній площині, що рекомендуються пілоту.

На дисплеї TCAS відображається така інформація (рис. 10.7). Свій літак відображається у вигляді літака (або стрілки), пофарбованого в білий або синій колір.

Літаки, що являють собою потенційну загрозу, зображаються залежно від рівня загрози таким чином:

1. Білий (або синій) ромб – якщо об'єкт не класифікується як конфліктуючий або літак, що наближається.

2. Заповнений ромб – якщо об'єкт наближається і перебуває в межах обраного діапазону дальності відображення, вертикальне

розділення з яким не більше ± ΔH_{TA}, не прогнозується вторгнення в зону зіткнення. При цьому TA або RA не видаються.

3. Коло жовтого кольору – якщо літак, що становить помірну загрозу, входить у зону підвищеної уваги TA і час до його вторгнення в зону зіткнення становить 20–48 с. Видається голосове попередження TRAFFIC – TRAFFIC («рух – рух»).

4. Червоний квадрат – якщо літак, що становить безпосередню загрозу, входить у зону попередження RA, і час до його вторгнення в зону зіткнення становить 15–35 с. Видаються візуальні й голосові рекомендації.

На дисплеї відображається також відносна висота польоту літака-порушника в сотнях футів, якщо він передає інформацію про свою висоту польоту. При цьому відносна висота зображається з відповідним знаком вище від символу літака-порушника, якщо свій літак летить нижче, або зображається нижче від символу – якщо вище.

Додатково зображається відповідна стрілка, якщо літак-порушник набирає висоту або знижується.

Рекомендації щодо усунення загрози зіткнення показуються на індикаторі вертикальної швидкості.

Червоною дугою відокремлюється діапазон вертикальної швидкості, котру потрібно уникати, а зелена дуга означає необхідну вертикальну швидкість (відповідно зниження або набору висоти).

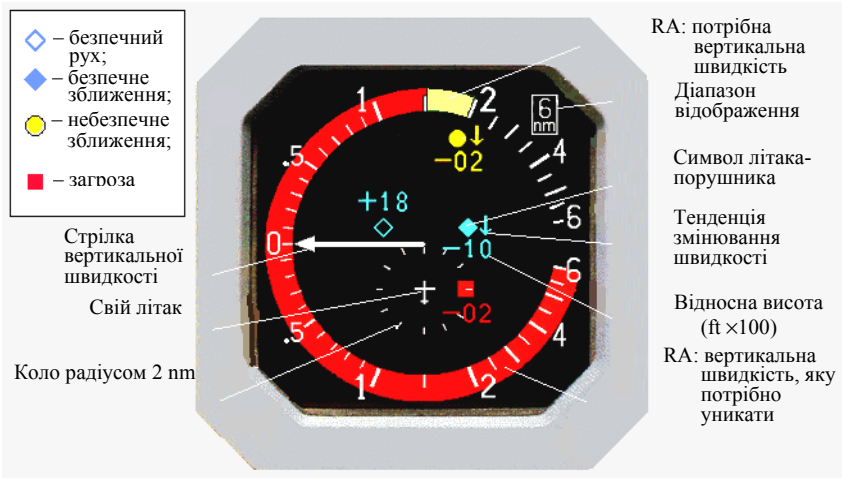

Рис. 10.7. Відображення інформації на дисплеї TCAS

10.4. Оцінювання ймовірності потенційно конфліктної ситуації

10.4.1. Постановка завдання

Для оцінювання потенційно конфліктної ситуації для середньострокового прогнозування потенційно конфліктних ситуацій на час до 15 – 20 хвилин використовують імовірнісні методи, в яких є аналітичний вираз для оцінювання ймовірності конфлікту пари літаків, що ґрунтується на апріорній інформації про дисперсію відхилення літака від планової траєкторії польоту в поздовжньому, бічному і вертикальному напрямках руху. Такий метод використовують, наприклад, в АС КПР CTAS (Center/Tracon Automation System) – центрі автоматизації TRACON (USA).

Імовірність конфлікту P_c визначають як імовірність того, що відстань між двома літаками $\mathbf{d}(t)$ у просторі стане меншою від деякого заданого мінімально допустимого безпечного значення (безпечного розділення літаків) $d_{\min}$, що математично записують так:

$$P_c = P\left\{\left\|\mathbf{d}(t)\right\| \le d_{\min}\right\}, \qquad (10.6)$$

де $\left\|\cdot\right\|$ – евклідова норма в тривимірному просторі $\Re^3$.

У базовому методі дотримано таких припущень:

– прогнозовані величини відхилень літаків від запланованої траєкторії польоту моделюються гауссівськими функціями розподілення;

– прогнозовані відхилення в поздовжньому, бічному і вертикальному рухах не залежать одне від одного;

– на інтервалі часу, протягом якого оцінюється імовірність конфлікту, швидкості польоту літаків і статистичні характеристики прогнозованих відхилень вважаються постійними.

Прогнозування невизначеності майбутнього положення кожного літака виконують, виходячи з таких положень. Під час керування бічним рухом літака, що здійснюється пілотом або автоматизованою бортовою системою керування (АБСК), забезпечується стабілізація літака відносно лінії заданого шляху з деякою характерною (типовою) випадковою похибкою. Тому середньоквадратичну похибку прогнозування відхилення в бічному напрямку беруть приблизно постійною в діапазоні від 0,5 морської милі для літаків, обладнаних АБСК, і до 1 милі для літаків без АБСК.

У поздовжньому русі керування виконують змінюванням тяги двигунів. У режимі крейсерського польоту компенсація впливу непередбачених змін побіжного чи зустрічного вітру змінюванням тяги двигуна неефективна. Тому в поздовжньому русі стабілізується швидкість польоту, що задається числом Маха, або задається повітряна швидкість, а не шляхова швидкість відносно поверхні землі чи положення літака вздовж планової траєкторії польоту.

Середньоквадратичне відхилення літака від заданої траєкторії польоту в поздовжньому напрямку має тенденцію збільшуватися зі швидкістю близько 0,25 милі за хвилину (15 вузлів). Це збільшення передусім відбувається через похибки прогнозування значення вітру.

Відхилення від заданої висоти польоту в першу чергу зумовлено похибками барометричного висотоміра, а також похибкою керування за висотою.

На підставі допущень нормально розподілені похибки прогнозування можна подати в плані як еліпс, а в тривимірному просторі як еліпсоїд. Прогнозування конфлікту за умови польоту двох літаків на одній висоті ілюструє рис. 10.8. Оскільки нехтується взаємна кореляція між похибками прогнозування в поздовжньому і поперечному напрямках, велика вісь еліпсів похибок зорієнтована вздовж напрямку польоту, а мала вісь – у поперечному.

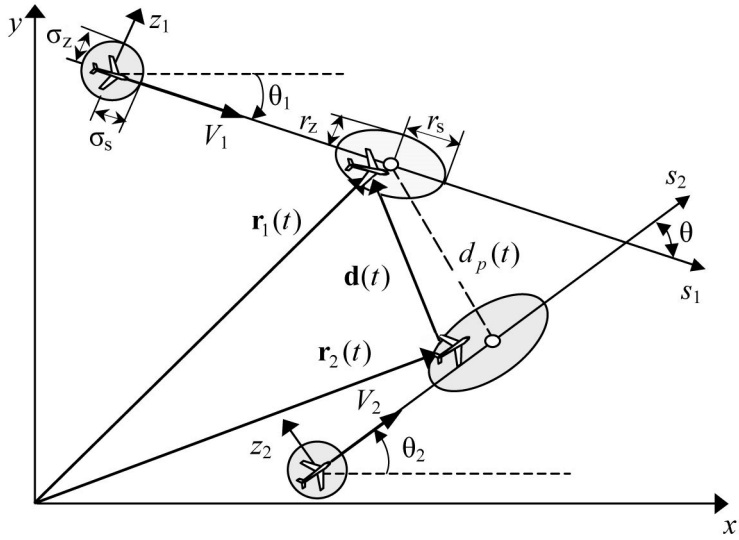

Рис. 10.8. Виявлення й оцінювання конфлікту з прогнозуванням невизначеності положення літаків

За цих допущень коваріаційна матриця похибок прогнозування має діагональний вигляд із середньоквадратичними відхиленнями r_s, r_z відповідно в поздовжньому і бічному рухах. Вважається, що відхилення в бічному положенні визначається переважно похибками навігаційних систем, які натепер такі, що дозволяють утримувати літак у заданих межах відхилень, тобто задовольняти вимогу відповідного RNP (Required Navigation Performance – потрібні навігаційні характеристики) на досить великому інтервалі часу.

Отже припускається, що дисперсія бічного відхилення постійна і дорівнює дисперсії похибки визначення бічного положення $r_z^2 = \sigma_z^2$. Для поздовжнього руху припускається, що дисперсія відхилення збільшується за квадратичним законом і визначається як $r_s^2 = t^2 \sigma_s^2$.

Таким чином, у міру збільшення часу прогнозування еліпси похибок прогнозування положення літаків витягуються уздовж напрямку польоту.

10.4.2. Математична формалізація

Для знаходження аналітичного виразу для оцінювання ймовірності конфлікту вектор відстані між двома літаками $\mathbf{d}(t)$ подають так, щоб його компоненти були незалежні. Для цього виконується процедура розкладання вектора у ортонормованому базисі. Вектор визначають як різницю

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

де вектори $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$ визначають положення двох літаків у просторі в заданий момент часу t відповідно першого і другого.

З урахуванням зазначених умов вектори є випадковими з гауссівським розподілом відповідно $N(\mathbf{M}_1, D_1)$ і $N(\mathbf{M}_2, D_2)$, де $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \Re^3$ – математичні сподівання, а D_1, D_2 – додатно визначені коваріаційні матриці. При цьому вектори $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ незалежні.

З огляду на наведені припущення вектор відстані між літаками $\mathbf{d}$ має нормальний розподіл $N(\mathbf{M}, D^2)$, а сам вектор можна подати як випадкову багатовимірну величину

$$\mathbf{d} = \mathbf{M} + D\,\boldsymbol{\gamma}, \tag{10.7}$$

де $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$; $D = \sqrt{D_1 + D_2}$ – така додатно визначена матриця, що $D^2 = D_1 + D_2$; $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор випадкових величин з нульовими математичними сподіваннями й одиничними дисперсіями, що має нормальний розподіл $N(0, I_3)$; I_3 – одинична матриця розміром 3×3.

Якщо є відомий власний ортонормований базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ матриці D у поданні вектора $\mathbf{d}$ (10.7), то виконується розкладання вектора математичних сподівань $\mathbf{M}$ за цим базисом

$$\mathbf{M} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3, \tag{10.8}$$

де q_i виражаються через скалярний добуток

$$q_i = (\mathbf{M}, \mathbf{e}_i), \qquad i = \overline{1,3}.$$

Тоді в базисі $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ можна записати:

$$D\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \lambda_1\gamma_1 \\ \lambda_2\gamma_2 \\ \lambda_3\gamma_3 \end{bmatrix}, \tag{10.9}$$

де $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^{\mathrm{T}}$ – вектор незалежних стандартних гауссівських випадкових величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ з характеристиками $N(0, I_3)$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – власні значення матриці D.

У результаті випадковий вектор відстані між літаками $\mathbf{d}$ у базисі $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ має розподіл

$$N([q_1, q_2, q_3]^{\mathrm{T}}, diag[\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2]) \tag{10.10}$$

з незалежними складовими, і його можна записати так:

$$\mathbf{d} = \mathbf{M} + D\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} q_1 + \lambda_1\gamma_1 \\ q_2 + \lambda_2\gamma_2 \\ q_3 + \lambda_3\gamma_3 \end{bmatrix}. \tag{10.11}$$

З урахуванням рівнянь (10.7), (10.11) вираз (10.6) набуває вигляду

$$P_c = P\{\| \mathbf{M} + D\boldsymbol{\gamma} \| \le d_{\min}\}. \tag{10.12}$$

10.4.3. Стохастичний імітаційний метод виявлення та оцінювання ймовірності конфліктів

Імовірність конфлікту можна оцінити прямим статистичним моделюванням через генерування розподілених із заданими параметрами випадкових величин відхилень від програмних точок траєкторій польоту для фіксованого моменту часу кожного з пари літаків, обчислення «миттєвої» відстані між літаками і порівняння її з мінімально допустимим зближенням літаків. Однак така процедура потребує великого обсягу вибірки стандартних випадкових гауссівських величин і тому не раціональна.

Після визначення статистичних характеристик випадкового вектора відстані між літаками $\mathbf{d}$, що записано виразом (10.10), і зведення цього вектора до вигляду з незалежними компонентами (10.11) оцінити конфлікт можна методом статистичного моделювання відхилень вектора відстаней з використанням критерію (10.12). Ця процедура потребує значно менше стандартних випадкових величин.

Після подання вектора відстані у вигляді (10.12) імовірність порушення встановленої норми безпечного розділення літаків

$$P_c = P\left\{\|\mathbf{M} + D\boldsymbol{\gamma}\|^2 \le d^2_{\min}\right\} =$$
$$= P\left\{(q_1 + \lambda_1\gamma_1)^2 + (q_2 + \lambda_2\gamma_2)^2 + (q_3 + \lambda_3\gamma_3)^2 \le d^2{}_{\min}\right\}.$$

Квадрат норми можна записати у вигляді

$$\| \mathbf{M} + D\boldsymbol{\gamma} \|^2 = \zeta = (q_1 + \lambda_1\gamma_1)^2 + (q_2 + \lambda_2\gamma_2)^2 + (q_3 + \lambda_3\gamma_3)^2 =$$
$$= \lambda_1^2\left(\frac{q_1}{\lambda_1} + \gamma_1\right)^2 + \lambda_2^2\left(\frac{q_2}{\lambda_2} + \gamma_2\right)^2 + \lambda_3^2\left(\frac{q_3}{\lambda_3} + \gamma_3\right)^2, \qquad (10.13)$$

де $\zeta = \zeta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, q_1, q_2, q_3)$.

Нехай є програма, що дозволяє моделювати множину n незалежних трійок значень $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ випадкової величини ζ (10.13) на базі стандартних гауссівських випадкових величин.

Відповідно до посиленого закону великих чисел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} I(\zeta_s \le d^2_{\min}) = P\left\{\zeta \le d^2_{\min}\right\},$$

де I – індикаторна функція випадкової події.

За великих n приблизно можна вважати, що для умови (10.12)

$$P_c = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} I(\zeta_s \le d_{\min}^2) = \frac{\#\left\{s : 1 \le s \le n, \zeta_s \le d_{\min}^2\right\}}{n}, \qquad (10.14)$$

де # означає кількість випадків, для яких задовольняється зазначена умова.

Знаючи закони зміни за часом $\mathbf{M}_j = \mathbf{M}_j(t)$ і $D_j = D_j(t)$, можна визначити складові q_i і λ_i для $\mathbf{M}$ (10.8) і D (10.9), а потім визначити значення ймовірності $P_c = P_c(t)$ згідно з рівнянням (10.14), зафіксувавши незалежні реалізації стандартних гауссівських величин $\gamma_1^1, \ldots, \gamma_1^n; \gamma_2^1, \ldots, \gamma_2^n; \gamma_3^1, \ldots \gamma_3^n$,

$$P_c = \frac{\#\left\{s : 1 \le s \le n, (q_1 + \lambda_1\gamma_1^s)^2 + \cdots + (q_3 + \lambda_3\gamma_3^s)^2 \le d_{\min}^2\right\}}{n}.$$

Рішення про прогнозоване порушення норми безпечного розділення літаків приймають тоді, якщо значення ймовірності стає $P_c(t) \ge 1 - \alpha$, де α – рівень значущості (зазвичай $\alpha = 0{,}05$).

Прийняття рішення про наявність потенційного конфлікту по одному разовому випадку може призвести до великої ймовірності помилкової тривоги. Тому правильніше оцінювати ймовірність протягом деякого інтервалу часу, на якому відбувається небезпечне зближення літаків.

Таким чином, інтерес становить оцінка загальної ймовірності P_k на деякому інтервалі часу $t \in (t_0, t_k]$, де t_0 – момент часу, коли під час прогнозування уперше виконалася умова $P_c(t_0) \ge 1 - \alpha$, а t_k – момент часу, коли літаки будуть виходити із зони конфлікту.

Загальну ймовірність можна визначити як усереднену ймовірність порушення норми безпечного розділення

$$P_k = \frac{1}{t_k - t_0}\int_{t_0}^{t_k} P_c(t)dt = \frac{1}{n(t_k - t_0)} \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t_k} I((q_1^t + \lambda_1^t\gamma_1^s)^2 + \cdots + (q_3^t + \lambda_3^t\gamma_3^s)^2 \le d_{\min}^2)dt. \qquad (10.15)$$

Використовуючи міру множини Лебега (mes), запишемо загальну ймовірність конфлікту (10.15):

$$P_k = \frac{1}{n(t_k - t_0)} \sum_{s=1}^{n} \text{mes}\left\{ t \in (t_0, t_k] : f_s(t) \le d_{\min}^2 \right\},$$

де $f_s(t) = (q_1^t + \lambda_1^t \gamma_1^s)^2 + \\ + \cdots + (q_3^t + \lambda_3^t \gamma_3^s)^2$.

Цю міру можна показати графічно (рис. 10.9) як суму довжин тих інтервалів, на яких графік функції $f_s(t)$ опуститься нижче від рівня $d_{\min}$.

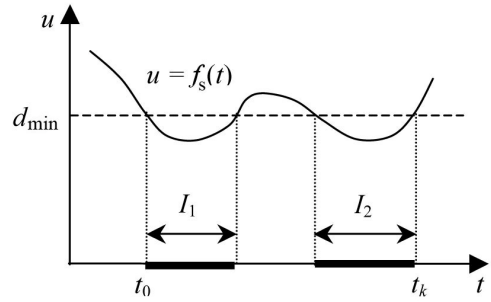

Рис. 10.9. Ілюстрація визначення загальної ймовірності конфлікту

10.4.4. Апріорна інформація для реалізації методу

Визначимо підготовчі операції для реалізації методу оцінювання ймовірності конфлікту для випадку польоту літаків на одному висотному ешелоні.

Для кожного j-го літака математичне сподівання $\mathbf{M}_j$ його місцеположення є планованою (програмною) траєкторією польоту і передбачається відомим.

Вважаючи, що літаки на прогнозованому інтервалі часу виконують політ відповідно до плану з постійною швидкістю, запишемо зміну вектора планового положення j-го літака (рис.10.10)

$$\mathbf{r}_j^p(t) = \mathbf{r}_j^p(0) + \mathbf{V}_j t \,, \qquad (10.16)$$

де $\mathbf{r}_j^p(0)$ – вектор початкового положення, що відповідає точці початкового положення на маршруті польоту $s_j(0)$; $\mathbf{V}_j$ – вектор швидкості польоту.

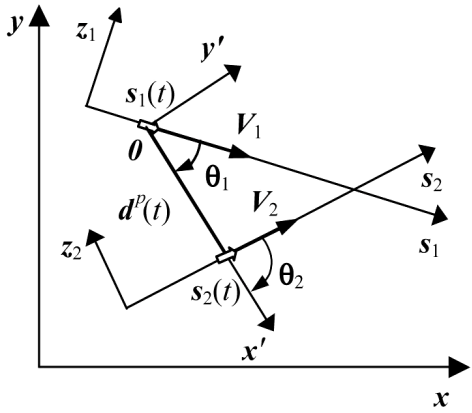

Рис. 10.10. Визначення відносного руху пари літаків за планом

Вектори $\mathbf{r}_j^p(t)$ в рівнянні (10.16) являють собою центри розподілу літаків, що у вигляді точок $s_j(t)$ переміщаються в міру руху літаків по лінії шляху.

Вектор планової різниці відстаней між літаками $\mathbf{d}^p = \mathbf{r}_1^p - \mathbf{r}_2^p$ для фіксованого моменту часу t за зазначених умов визначимо як

$$\mathbf{d}^p(t) = \overrightarrow{s_1 s_2}(t) = \mathbf{r}_1^p(t) - \mathbf{r}_2^p(t) = \mathbf{r}_1^p(0) - \mathbf{r}_2^p(0) + t(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)\,.$$

Позначимо:

$$M_d = M_d(t) = \| \overrightarrow{s_1 s_2}(t) \| = \| \mathbf{r}_1^p(0) - \mathbf{r}_2^p(0) + t(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \|\,. \quad (10.17)$$

Для наступних перетворень запровадимо декартову систему координат $x'Oy'$ з центром, сполученим з центром розподілу $s_1(t)$ одного з літаків і орієнтовану уздовж лінії, що з'єднує центри розподілу літаків $s_1(t)$ і $s_2(t)$, тобто уздовж вектора $\overrightarrow{s_1 s_2}$ (рис. 10.10).

Оскільки відповідно до плану передбачається постійна швидкість польоту літаків, то система координат $x'Oy'$ переміщається, не змінюючи орієнтацію в міру збільшення часу t.

Положення другого літака у введеній системі координат $x'Oy'$ відносно першого описується нормальним випадковим вектором $N(M_d \mathbf{e}_1, D_d)$, де число M_d визначається виразом (10.17); $\mathbf{e}_1 = [1, 0]^{\mathrm{T}}$, а D_d – коваріаційна матриця вектора відстані між літаками, який можна визначити в такий спосіб.

Припускається, що відхилення від заданої траєкторії польоту відбувається незалежно в поздовжньому s і бічному z рухах, тоді коваріаційна матриця дисперсій відхилень для кожного літака має діагональний вигляд

$$D(t) = \begin{bmatrix} r_s^2(t) & 0 \\ 0 & r_z^2(t) \end{bmatrix}.$$

Наведемо коваріаційні матриці $D_j(t)$ кожного j-го літака до системи координат $x'Oy'$, орієнтованої уздовж вектора відносної відстані, з використанням матриці напрямних косинусів $U_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}$. У результаті для кожного літака будемо мати $D'_j = U_j D_j U_j^{\mathrm{T}}$, а коваріаційну матрицю для вектора відстані між літаками визначимо як

$$D_d = D'_1 + D'_2. \qquad (10.18)$$

Нехай $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – власні вектори матриці D_d, а λ_1^2, λ_2^2 – відповідні власні числа, $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1,2$.

Виконаємо розкладання за власним базисом для компонентів (10.17), (10.18), як було показано у рівняннях (10.8), (10.9) і (10.11):

$$\mathbf{M} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2;$$

$$D_d = \lambda_1^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} + \lambda_2^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^{\mathrm{T}}; \quad \sqrt{D_d} = \lambda_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} + \lambda_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^{\mathrm{T}}. \quad (10.19)$$

Таким чином, у базисі $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ випадковий вектор відстані $\mathbf{d}$ (10.7) між літаками для фіксованого моменту часу має розподіл $N([q_1, q_2]^{\mathrm{T}}, \mathrm{diag}[\lambda_1^2, \lambda_2^2])$.

Нехай $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор незалежних стандартних гауссівських випадкових величин з розподілом $N(0, I_2)$, де I_2 – одинична матриця розміром 2×2.

Тоді в базисі $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ складові вектора відстані між літаками $\mathbf{d}$ після розкладання (10.19) записуємо

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1\gamma_1 \\ \lambda_2\gamma_2 \end{bmatrix}, \qquad (10.20)$$

при цьому квадрат норми

$$\| \mathbf{d} \|^2 = (q_1 + \lambda_1\gamma_1)^2 + (q_2 + \lambda_2\gamma_2)^2 .$$

Імовірність порушення встановленої норми безпечного розведення літаків за прийнятих умов визначаємо так:

$$P_c = P\{\| \mathbf{d} \|^2 \le d_{\min}^2\} = P\{(q_1 + \lambda_1\gamma_1)^2 + (q_2 + \lambda_2\gamma_2)^2 \le d_{\min}^2\} .$$

10.4.5. Рівняння оцінювання імовірності конфлікту

У разі розкладання випадкового вектора відстані між літаками $\mathbf{d}$ в ортонормованому базисі його складові у виразі (10.20) стають незалежними, тоді функцію розподілу вектора відстані (для випадку польоту літаків на одному висотному ешелоні) можна записати так:

$$g(x, y) = g(x)g(y) = \frac{1}{2\pi\lambda_1\lambda_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-q_1)^2}{\lambda_1^2} + \frac{(y-q_2)^2}{\lambda_2^2} \right) \right), \qquad (10.21)$$

де x, y – координати в ортонормованому базисі.

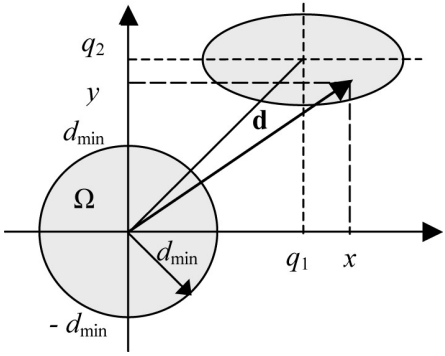

Рис. 10.11. Виявлення порушення безпечного розведення літаків

Еліпс розсіювання відносно точки, що визначається значеннями математичного сподівання q_1, q_2 величин x і y, умовно показано на рис. 10.11.

Імовірність конфлікту визначають як імовірність попадання випадкового вектора відстані між літаками $\mathbf{d}$ з характеристиками (10.20), положення якого визначається

вектором математичних сподівань $[q_1, \quad q_2]^{\mathrm{T}}$ і діагональною коваріаційною матрицею $\mathrm{diag}[\lambda_1^2, \quad \lambda_2^2]$, у заборонену область, обмежену колом радіусом $d_{\min}$, з центром в початку координат.

Імовірність конфлікту для функції (10.21) можна записати так (рис. 10.11):

$$P_c = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{2\pi\lambda_1\lambda_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-q_1)^2}{\lambda_1^2} + \frac{(y-q_2)^2}{\lambda_2^2} \right)\right) dxdy, \quad (10.22)$$

де Ω – область інтегрування, для якої задовольняється умова $x^2 + y^2 \le d_{\min}^2$.

Беручи до уваги незалежність випадкових величин x і y, вираз для ймовірності конфлікту (10.22) можна записати у вигляді

$$P_c = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\lambda_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-q_1)^2}{2\lambda_1^2}} \frac{1}{\lambda_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-q_2)^2}{2\lambda_2^2}} dxdy,$$

і зінтегрувати (рис. 10.11) для зовнішнього інтеграла в межах від $-d_{\min}$ до $d_{\min}$, а для внутрішнього, використовуючи рівняння кола $x^2 + y^2 = d_{\min}^2$, у межах від $-\sqrt{d_{\min}^2 - y^2}$ до $\sqrt{d_{\min}^2 - y^2}$.

У результаті оцінка імовірності конфлікту для фіксованого моменту часу t визначається з виразу

$$P_c = \int\limits_{-d_{\min}}^{d_{\min}} \left(\frac{1}{\lambda_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-q_2)^2}{2\lambda_2^2}} \frac{1}{\lambda_1\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt{d_{\min}^2-y^2}}^{\sqrt{d_{\min}^2-y^2}} e^{-\frac{(x-q_1)^2}{2\lambda_1^2}} dx \right) dy = \quad (10.23)$$

$$= \frac{1}{\lambda_2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-d_{\min}}^{d_{\min}} \left(e^{-\frac{(y-q_2)^2}{2\lambda_2^2}} \left(\Phi\left(\frac{\sqrt{d_{\min}^2 - y^2} - q_1}{\lambda_1} \right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{d_{\min}^2 - y^2} - q_1}{\lambda_1} \right) \right) \right) dy.$$

Обчислюючи ймовірність конфлікту (10.23) для послідовних моментів часу, можна виявити динаміку її зміни й оцінити швидкість зміни (наростання чи зменшення).

Важливим показником є максимальне значення ймовірності конфлікту

$$P_{\max} = \max\{P_c(t)\}.$$

Загальну ймовірність конфлікту P_k визначають у результаті усереднення значень імовірностей, отриманих для фіксованих моментів часу за період часу найбільшого зближення літаків.

При цьому для кожного моменту часу потрібно обчислювати значення $q_1(t), q_2(t)$ і $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ так, що $P_c = P_c(t)$.

Загальну ймовірність можна апроксимувати виразом

$$P_k = \frac{1}{t_k - t_0} \sum_{i=0}^{k} P_c(t_i)\Delta t,$$

де t_0 – момент початку порушення безпечного розведення літаків; t_k – момент, коли це порушення закінчується; Δt – крок дискретизації.

10.5. Багатоальтернативний метод прийняття рішення

На практиці зазвичай основою для прийняття рішення є оцінювання імовірності конфлікту або ризику зіткнення літаків, яке виконується за двохальтернативним правилом, що визначає дві ситуації повітряного руху: нормальну ситуацію і катастрофічну ситуацію. Такий підхід має суттєві обмеження, оскільки відбувається лише проста констатація факту наявності однієї з двох ситуацій.

Відомі нові підходи до оцінювання конфліктних ситуацій для системи прийняття рішень, що дозволяють не тільки констатувати наявність тієї чи іншої ситуації (діюча модель ICAO), але й дозволяють керувати середнім ризиком катастрофи з наступною його мінімізацією, що є актуальним, особливо в умовах польотів згідно з RNAV (Area Navigation – зональна навігація) та RVSM (Reduced Vertical Separation Minimum – скорочений мінімум вертикального ешелонування). При цьому вводиться більше степенів вільності (тобто більшу кількість ситуацій), що дозволяє прогнозувати та мінімізувати ризик катастрофи і підвищити точність його оцінки. За такого підходу конфліктні ситуації класифікуються у міру їх ускладнення, починаючи від нормальної ситуації і закінчуючи катастрофічною, тобто:

– нормальна ситуація;
– ускладнення умов польоту;
– складна ситуація;
– аварійна ситуація;
– катастрофічна ситуація.

При цьому в ході польоту можливі різні варіанти розвитку конфліктної ситуації або її усунення і переходи від одного типу ситуації до іншої, як показано, наприклад, на рис. 10.12 для двох ПК.

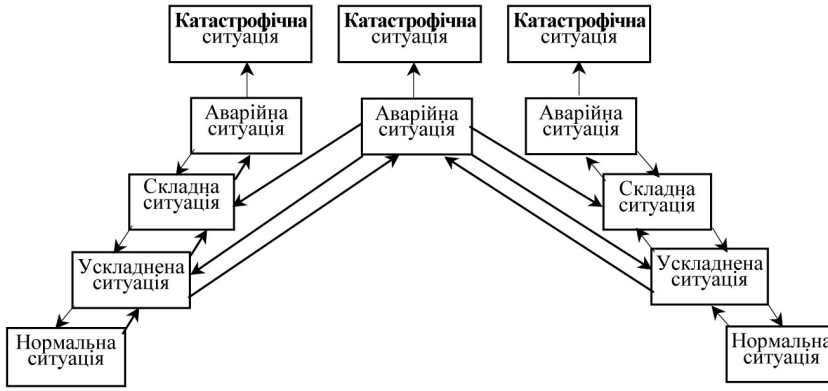

Рис. 10.12. Схема можливих варіантів розвитку конфліктних ситуацій

Такий підхід дає змогу застосувати метод багатоальтернативного послідовного ситуаційного аналізу.

Основні чинники, за яких перевага віддається саме багатоальтернативному послідовному розв'язувальному правилу щодо розпізнавання ситуацій під час руху, такі:

1. Під час прийняття рішення про влучення ПК у певну небезпечну ситуацію за одиночним спостереженням, або за групою спостережень фіксованого обсягу можуть бути допущені помилки в класифікації ситуацій. Особливо це стосується місцеположення ПК на межі двох небезпечних зон. Тоді буде незрозуміло, до якої із зон віднести ПК, і відповідні обчислювальні процедури з фіксованою тривалістю спостережень стають нестійкими. Фактично в цьому разі потрібно ввести зони відмови для розв'язувального правила – відмови від прийняття рішення. Водночас при послідовному

аналізі спостереження продовжуються рівно стільки, скільки потрібно для класифікації ситуації із заданою середньою імовірністю похибки. Це означає, що під час перебування літака поблизу межі між двома небезпечними зонами потрібні додаткові спостереження для впевненої класифікації небезпечної ситуації, що є притаманним процедурі послідовного аналізу.

2. Формалізація міркувань, наведених вище, означає, що послідовне порогове багатоальтернативне розв'язувальне правило приводить до меншого ризику, ніж будь-яке інше правило з фіксованою тривалістю.

3. Багатоальтернативне послідовне розв'язувальне правило дозволяє досягти кращого співвідношення тривалість розв'язувальної процедури і достовірності рішення, ніж з використанням розв'язувальних процедур з фіксованою тривалістю.

У межах розглядуваного методу конфліктні ситуації класифікують залежно від найкоротшої відстані $d_{\min}$ між траєкторіями двох або декількох ПК, відокремлюють спектр ситуацій і на підставі спостережень формують багатоальтернативне розв'язувальне правило.

Відповідно до значення $d_{\min}$ класифікують зони небезпеки (рис. 10.13). Якщо $d_{\min} \le 2\lambda$, де λ – ефективний діаметр ПК, то приймають рішення про катастрофічну ситуацію. Якщо $2\lambda \le d_{\min} \le \tau_1 v_{12}$, де v_{12} – модуль відносної швидкості двох ПК, приймають рішення про аварійну ситуацію.

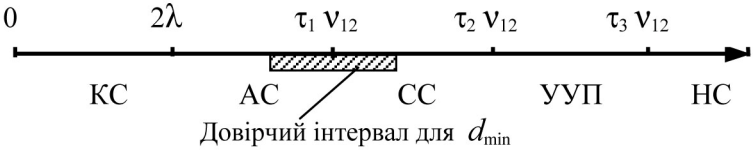

Рис. 10.13. Класифікація ситуацій за значенням $d_{\min}$:
КС – катастрофічна ситуація; АС – аварійна ситуація;
СС – складна ситуація; УУП – ускладнення умов польоту;
НС – нормальна ситуація

При цьому крайня точка аварійної ситуації відповідає моменту часу $\tau_1 = 20$ с, оскільки з цього часу починається остання зона попередження катастрофи і можна приймати рішення про маневр.

Якщо $\tau > 20\,\text{с}$, діє система раннього попередження, що відповідає менш небезпечним ситуаціям. Так, якщо $\tau_1 v_{12} \le d_{\min} \le \tau_2 v_{12}$, де $\tau_2 = 2\,\text{хв}$, приймають рішення про складну ситуацію, а якщо $\tau_2 v_{12} \le d_{\min} \le \tau_3 v_{12}$, де $\tau_3 = 20\,\text{хв}$ – рішення про ускладнення умов польоту, нарешті, нерівності $d_{\min} \ge \tau_3 v_{12}$ відповідає нормальна ситуація.

Слід зазначити, що відстань між ПК визначається за даними системи спостереження і, отже, залежить від похибок вимірювань, тому визначення ситуації ґрунтується на оцінюванні відстані між ПК $\hat{d}_{\min}$ і довірчому інтервалі. Остаточне рішення про ситуацію небезпеки приймають за довірчим інтервалом: якщо він проходить через декілька зон небезпеки, то рішення приймають на користь найбільш небезпечної з цих зон. Так, на рис. 10.13 зображено довірчий інтервал, що проходить через аварійну і складну ситуацію; у цьому випадку рішення приймають на користь більш небезпечної аварійної ситуації.

Розглянемо більш детально результати накладання довірчого інтервалу на спектр ситуацій (рис. 10.14), де ситуації сформовані за найкоротшою відстанню $d_{\min}$ між траєкторіями двох ПК, що зближаються. Нехай A_0 – катастрофічна ситуація, A_1 – аварійна ситуація, ... , A_k – нормальна ситуація. Тут $k = 4$, що відповідає п'ятьом обраним ситуаціям; однак кількість ситуацій $k+1$ може бути іншою.

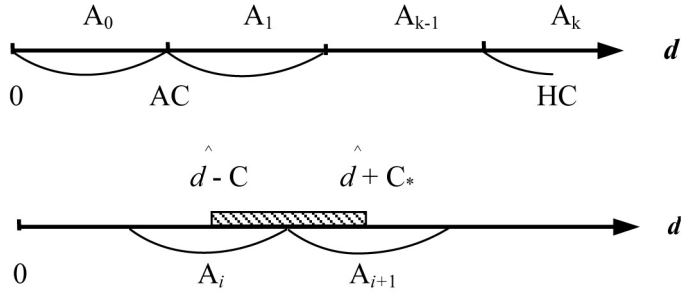

Рис. 10.14. Накладання довірчого інтервалу на спектр ситуацій

Нехай ситуації A_i відповідає діапазон значень $[d_i, d_{i+1}]$ мінімальної відстані $d_{\min}$, причому

$$d_0 = 0 < d_1 < \ldots < d_k < d_{k+1} = +\infty .$$

Побудований довірчий інтервал $[\hat{d}_{\min} - C, \hat{d}_{\min} + C_*]$ перетинається з деякими ситуаціями $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{i+q}$, де $q \geq 0$. Це перетинання інтервалу із ситуаціями $A_i, \ldots, A_{i+q}$ означає виконання нерівностей:

$$d_i < \hat{d}_{\min} - C < d_{i+1}; \quad d_{i+q} < \hat{d}_{\min} + C_* < d_{i+q+1}.$$

При цьому приймається гіпотеза A_i на користь найбільш небезпечної можливої ситуації.

Нехай довірчий інтервал $[\hat{d}_{\min} - C, \hat{d}_{\min} + C_*]$ побудовано за заданою довірчою імовірністю $1-\alpha$. Тоді, якщо $i \geq 0$, то умовна імовірність допускає оцінку:

$$P(\text{приймається одна з гіпотез } A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_k \mid \text{справедлива ситуація } A_0, \text{ або } A_1, \ldots, \text{ або } A_i) \leq \alpha.$$

У цьому сенсі ймовірність правильного розпізнавання ситуацій, що включають катастрофічну ситуацію і сусідні з нею, не менше $1-\alpha$, що гарантує заданий рівень безпеки руху. Однак лишається небезпека хибного спрацьовування, коли рішення приймається на користь більш небезпечної ситуації, ніж істинна ситуація.

Для зменшення імовірності хибного спрацьовування необхідно попіклуватися про те, щоб довірчий інтервал не накривав три ситуації, а міг накривати лише дві ситуації A_i, A_{i+1} (це забезпечить розрізнення ситуацій). Нехай $\hat{l}$ – довжина побудованого довірчого інтервалу. У разі виконання нерівності $\hat{l} \leq d_{i+2} - d_i, \quad i = \overline{0, k-2}$ довірчий інтервал не зможе покрити три ситуації одночасно: A_{i-1}, A_i, A_{i+1}. Крім того, бажано, щоб $\hat{l} \leq d_k - d_{k-1}$, тоді довірчий інтервал не покриває трьох останніх ситуацій A_{k-2}, A_{k-1}, A_k. Таким чином, наступна нерівність гарантує розрізнення ситуацій:

$$\hat{l} \leq \min\{d_{i+2} - d_i, \quad 0 \leq i \leq k-2; \quad d_k - d_{k-1}\} = l_0.$$

Послідовний багатоальтернативний аналіз зводиться до такого. Нехай є N класів ситуацій $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 3$. Якщо випадкова величина x належить ситуації A_k, то вона має щільність $\rho_k(x)$, $k = \overline{1,n}$. Нехай також задано апріорні імовірності появи класів ситуацій $p_1, \ldots p_n$; $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Тоді, якщо є ν незалежних спостережень випадкової величини x зі щільністю $\rho_k(x)$, $k = \overline{1,n}$ і вибіркою $x_1, \ldots, x_\nu$, то сукупний вектор $x_k = \{x_1, \ldots, x_\nu\}$ має щільність розподілу $\rho_k^\nu(x) = \rho_k^\nu(x_1, \ldots, x_\nu)$.

Утворимо апріорну щільність розподілу

$$q_k^\nu(x_\nu) = \frac{p_k \rho_k^\nu(x_\nu)}{\sum_{j=1}^{n} p_j \rho_j^\nu(x_\nu)}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Нехай для заданих додатних порогів $b_1, \ldots, b_n$ $0{,}5 < b_k < 1$, $k = \overline{1,n}$. Після ν незалежних спостережень випадкової величини x приймається рішення про її належність ситуації A_k, $k = \overline{1,n}$, якщо

$$q_k^\nu \geq b_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{10.24}$$

Суть послідовної класифікації ситуацій полягає в тому, що спостереження продовжуються до такого моменту, коли нерівність (10.24) виконується для деякого класу A_k, $k = \overline{1,n}$. Якщо ж для даного ν за кожного $k = \overline{1,n}$

$$q_k^\nu(x_\nu) < b_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{10.25}$$

то спостереження продовжуються.

Умова $b_k > 0{,}5$, $k = \overline{1,n}$ (10.25) забезпечує однозначність прийняття рішення. Далі, якщо справедлива гіпотеза про належ-

ність величини ситуації $A_k, k=\overline{1,n}$, то згідно з деякими природними вимогами додатності чисел Кульбака –Лейбеєра

$$\lambda_{k_j}=\int\left(\ln\frac{\rho_k(x)}{\rho_j(x)}\right)\rho_k(x)dx,\quad k=\overline{1,n},\quad k\neq j$$

маємо з імовірністю 1,0

$$q_k^{\nu}(x_{\nu})\overset{P}{\to}1,\quad \nu\to\infty$$

і тому в наслідок умов $b_k<1,\quad k=\overline{1,n}$ рішення з імовірністю 1,0 буде прийнято за кінцевий інтервал спостереження.

Однак для побудови запропонованого послідовного правила потрібно мати апріорні дані про ймовірності появи класів ситуацій $p_1,\ldots,p_n$ і про умовну щільність розподілу випадкової величини x у термінах якої описуються ситуації $A_k, k=\overline{1,n}$.

За результатами багатоальтернативного ситуаційного аналізу планується маневр, який би перевів найбільш небезпечну ситуацію у менш небезпечну, не збільшуючи міру небезпеки інших ситуацій. Виконання подібного маневру дозволяє зменшити ризик катастрофи.

Залежно від ситуації, що визначається за результатами спостереження, встановлюється набір можливих варіантів маневрів щодо усунення потенційного конфлікту. Важливе значення має швидкість розвитку конфліктної ситуації, що залежить від параметрів відносного руху літаків (перетинання, вдогін, зустрічний рух і т. ін.). Для кожної ситуації є певний набір фізично можливих маневрів для певного літака зі збереженням безпечного інтервалу, при цьому перевіряється можливість виникнення конфліктів з іншими літаками в результаті цього маневру. При цьому основні положення системи підтримання прийняття рішення такі.

1. Установлюються декілька рівнів прийняття рішення (рівнів попередження) залежно від класифікації конфліктної ситуації, динаміки і складності польотної ситуації.

2. Для кожного рівня визначаються:

– правила маневрування і тип маневру,

– дистанція між літаками (дистанція прийняття рішення), для якої встановлюється набір можливих варіантів маневрів щодо усунення потенційного конфлікту.

3. Вибір і прийняття рішення щодо усунення конфлікту виконується послідовним оцінюванням (прогнозуванням) моментів часу, коли літаки зблизяться на встановлені дистанції прийняття рішення.

4. Визначається граничний момент прийняття рішення з урахуванням похибок прогнозування.

5. Перелік можливих варіантів маневрування і час, що залишився до граничного моменту вибору варіанта і прийняття рішення, відображаються для остаточного прийняття рішення.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Відповідно до вимог, розроблених ІСАО, для впровадження нових систем КПР мають бути введені системи управління безпекою польотів (SMS – Safety Management System). Тому важливу роль приділяють розробленню і дослідженню систем підтримання прийняття рішень у процесі КПР.

Найбільш складним у дослідженні системи повітряного руху є математична формалізація процесу прийняття рішення і його моделювання.

Проблема достовірності виявлення конфліктів полягає в тому, що через різні чинники, що мають випадковий характер, такі, наприклад, як зміна динаміки польоту, навігаційні похибки, похибки поточного оцінювання параметрів траєкторії польоту, вплив вітру, майбутнє положення літака має область невизначеності, і розмір цієї області має тенденцію збільшуватися зі збільшенням часу прогнозування. Через невизначеність місцеположення може бути надто раннє виявлення конфлікту, який в кінцевому підсумку може і не відбутися. Відповідно прийняте рішення про маневрування в цьому випадку може виявитися марним, більш того, може навіть згенерувати інші конфлікти. Про те надмірна затримка прийняття рішення може призвести до небезпечного розвитку подій і неможливості виконання оптимального маневрування.

Можна виокремити три етапи процесу прийняття рішень для усунення конфлікту: вибір літака, якому буде заданий маневр, вибір типу маневру і визначення деталей (елементів) процесу маневрування. Ці рішення передбачають перевірку горизонтального положення, висоти і швидкості для кожного літака, залученого до конфлікту.

Якість програмних засобів підтримання рішень диспетчера під час КПР значною мірою залежить від використовуваних методів прогнозування, основу яких складають математичні моделі руху літаків. При цьому найважливішим чинником у системах виявлення і запобігання конфліктам є час прогнозу. З одного боку, зі збільшенням часу прогнозу різко знижується достовірність оцінки ситуації, з другого боку, зі зменшенням часу прогнозу скорочується час прийняття рішення і обмежується кількість можливих варіантів усунення конфлікту. Відомі три градації часу прогнозу для систем виявлення і запобігання конфліктним ситуаціям: короткостроковий (Short range) – до декількох хвилин, середньостроковий (Mid-range) – до декількох десятків хвилин і довгостроковий (Long range) – до декількох годин. Вирішення завдання прогнозування і розв'язання конфліктів на короткостроковий період часу покладається на екіпажі літаків, на середньостроковий період часу – на систему КПР, а довгострокове прогнозування віддається системі планування повітряного руху.

Завдання дослідження методів і алгоритмів підтримання прийняття рішення під час КПР з використанням комп'ютерного моделювання стає дедалі актуальнішим для впровадження нових концепцій з організації повітряного руху.

Питання для самоперевірки

1. Які основні завдання вирішуються у процесі прийняття рішення під час КПР?

2. Як забезпечується безпека повітряного руху? Що означає термін «ешелонування»?

3. Укажіть критерій виявлення конфлікту з використанням геометричних методів попередження небезпечних зближень.

4. Запишіть у загальному вигляді критерій виявлення конфлікту з використанням імовірнісних методів оцінювання потенційно конфліктних ситуацій.

5. У чому полягає перевага імовірнісних методів і моделей оцінювання конфліктів?

6. Наведіть особливості організації системи прийняття рішень у разі кооперативного КПР.

7. Поясніть принцип дії систем попередження зіткнення, побудованих на основі «тау» критерію.

8. Зобразіть «трикутник зустрічей» для геометричного розв'язання задачі виявлення конфлікту.

9. Поясніть принцип і покажіть послідовність дій алгоритму попередження небезпечного зближення літаків в АС КПР.

10. Поясніть принцип дії TCAS, зобразіть захисні зони.

11. Яка інформація для підтримання прийняття рішень відображається на дисплеї TCAS?

12. Які основні чинники впливають на достовірність визначення прогнозованого положення літаків і як вони моделюються для оцінювання потенційно конфліктних ситуацій?

13. Укажіть процедуру стохастичного імітаційного методу виявлення й оцінювання ймовірності конфліктів.

14. Яка процедура аналітичного розрахунку імовірності потенційного конфлікту? Як моделюється апріорна інформація?

15. У чому полягає перевага застосування багатоальтернативного методу прийняття рішення?

16. Покажіть приклад класифікації конфліктних ситуацій із застосуванням багатоальтернативного методу прийняття рішення.

17. Пояснить процедуру послідовного багатоальтернативного аналізу класифікації конфліктних ситуацій.

11. ОЦІНЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМИ ПОВІТРЯНОГО РУХУ

11.1. Оцінювання ймовірності потенційно конфліктних ситуацій у разі перетинання трас

Складність системи КПР може характеризуватися кількістю потенційних конфліктних ситуацій, які можна оцінити аналітично або методом статистичного моделювання.

Безпека повітряного руху на трасах, що перетинаються, забезпечується витримуванням установлених безпечних відстаней між літаками.

Один з можливих підходів ґрунтується на застосуванні теорії масового обслуговування. При цьому точку перетину трас можна розглядати як обслуговуючий прилад. Потоки літаків на пересічних трасах являють собою два потоки заявок на обслуговування (рис. 11.1). Кожний літак, що перебуває в околі точки перетину, блокує ділянку траси, яку він перетинає. Якщо літак іншого потоку попадає на блоковану ділянку, то виникає конфліктна ситуація. Величина блокованої ділянки $L_{бл}$ визначає час блокування точки перетину, тобто час зайнятості приладу обслуговування. Довжина блокованої ділянки залежить від кута перетину трас і швидкості польоту літаків.

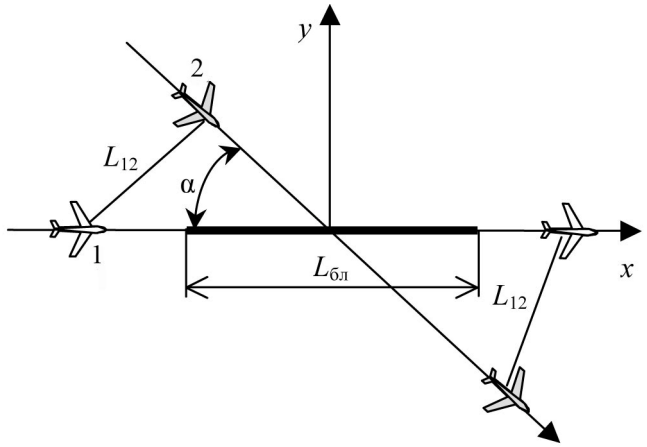

Рис.11.1. Визначення потенційного конфлікту на трасах що перетинаються

Для розрахунку довжини блокованої ділянки припустимо, що літак, який летить по другій трасі, пролітає точку перетину трас і тим самим блокує першу трасу. Швидкості літаків на першій і другій трасах відповідно дорівнюють V_1 і V_2.

Кут, під яким перетинаються траси, дорівнює α.

Уведемо систему координат *x–y* із центром у точці перетину трас і опишемо рух літаків у цій системі координат.

За умови постійної швидкості польоту кінематичні рівняння руху літаків, за якими визначають їх поточні координати записуємо:

– для літака на першій трасі

$$x_1(t) = x_1(0) + V_1 t\,; \qquad y_1(t) = 0\,; \tag{11.1}$$

– для літака на другій трасі

$$x_2(t) = x_2(0) + V_2 t\cos\alpha\,;\; y_2(t) = y_2(0) - V_2 t\sin\alpha\,. \tag{11.2}$$

Коли блокувальний літак перебуває в точці перетину трас, тоді

$$x_1(0) = -L_{бл}/2\,; \quad x_2(0) = y_2(0) = 0\,. \tag{11.3}$$

Умовою безпечної розбіжності літаків на пересічних трасах є

$$\min L_{12} \geq L_{без}\,, \tag{11.4}$$

де $\min L_{12}$ – мінімальні відстані між літаками; $L_{без}$ – допустима безпечна відстань.

Якщо відомі координати літаків, то відстань між літаками можна визначити з виразу

$$L_{12} = \sqrt{[x_1(t) - x_2(t)]^2 + [y_1(t) - y_2(t)]^2}\,.$$

З урахуванням кінематичних рівнянь руху (11.1) і (11.2) і умови (11.3) маємо

$$L_{12} = \sqrt{[x_1(0) + V_1\, t - V_2 t\cos\alpha]^2 + V_2^2 t^2 \sin^2\alpha}\,. \tag{11.5}$$

Відстань між літаками, що визначається за формулою (11.5), досягає мінімуму для моменту часу t_m, за якого $\dfrac{dL_{12}}{dt} = 0$.

Продиференціювавши L_{12} і дорівнявши до нуля, знаходимо

$$t_m = -\frac{(V_1 - V_2\cos\alpha)x_1(0)}{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}\,.$$

Підставивши отриманий вираз для часу t_m у рівняння (11.5), з огляду на умови безпеки (11.4), визначаємо довжину блокованої ділянки

$$L_{\text{бл}} = 2x_1(0) = \frac{2L_{\text{без}}}{V_2}\sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}}\,. \qquad (11.6)$$

За однаковій швидкості літаків на трасах довжину блокованої ділянки визначаємо з виразу (11.6) як

$$L_{\text{бл}} = 2L_{\text{без}}\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha}}\,.$$

Для визначення кількості потенційних конфліктних ситуацій уявимо точку перетину трас як одноканальну СМО, куди надходять два найпростіших потоки літаків з інтенсивностями відповідно λ_1 і λ_2. Спочатку будемо вважати, що потоки без пріоритетів. Припускаємо, що через зайнятість систем (блокування траси) заявка, що надійшла, одержує відмову. Реально це відповідає випадку, коли диспетчер у разі блокування траси переводить літак на інший ешелон. Потоки на пересічних трасах можна вважати незалежними і блокування точки перетину може спричинятися літаками будь якого потоку. Можна припустити, що час блокування розподілено за показовим законом. Потоки подій, що переводять систему з одного стану в інший, припускаємо пуассонівськими, отже, процес, що перебігає в системі, є марковським з неперервним часом.

Позначимо ймовірності станів, у яких може бути система:

P_0 – імовірність того, що точка перетину трас не заблокована;

P_1 – імовірність того, що точка заблокована літаком, який летить по першій трасі;

P_2 – імовірність того, що точка заблокована літаком, який летить по другій трасі.

Середній час блокування (зайнятості системи) для першого потоку позначимо через τ_1, а для другого – через τ_2.

Складемо систему диференціальних рівнянь для ймовірностей стану. Граф станів для описаної системи показано на рис. 11.2.

Скористаємося мнемонічним правилом, відповідно до якого похідна $\frac{dP_i(t)}{dt}$ імовірності перебування системи в стані x_i дорівнює алгебричній сумі декількох членів. Кількість членів цієї суми дорівнює кількості стрілок на графі станів. Якщо стрілка напрямлена до стану, то член беремо зі знаком плюс, якщо зі стану – то зі знаком мінус. Кожен член суми дорівнює добутку ймовірностей того стану, з якого виходить стрілка, на інтенсивність потоку подій, що переводить систему по цій стрілці.

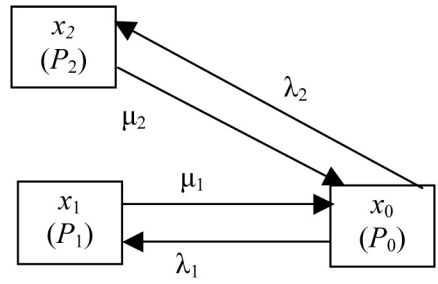

Рис. 11.2. Граф станів для визначення конфлікту за умови відсутності пріоритетів

У результаті одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
\dot{P}_0(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t) + \mu_1 P_1(t) + \mu_2 P_2(t);\\
\dot{P}_1(t) &= -\mu_1 P_1(t) + \lambda_1 P_0(t);\\
\dot{P}_2(t) &= -\mu_2 P_2(t) + \lambda_2 P_0(t),
\end{aligned} \qquad (11.7)$$

де $\mu_1 = \frac{1}{\tau_1}$; $\mu_2 = \frac{1}{\tau_2}$.

При цьому слід враховувати, що $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1$.

Із системи рівнянь (11.7) визначимо ймовірності перебування системи в різних станах для стаціонарного режиму при $t \to \infty$:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \lambda_1\tau_1 + \lambda_2\tau_2}; \quad P_1 = \lambda_1\tau_1 P_0; \quad P_2 = \lambda_2\tau_2 P_0.$$

Для стаціонарного розподілу, що характеризується середнім часом перебування системи в тому чи іншому стані, кількість конфліктів у точці перетину трас можна визначити за виразом

$$q = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\tau_1 + \tau_2)}{1 + \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2}.$$

Розглянемо випадок, коли один з потоків літаків має перевагу перед другим потоком. Так, якщо літаки, що летять по першій трасі, мають вищий пріоритет, а точка перетину трас блокована літаком, що летить по другій трасі, то літак другого потоку, що блокує, повинен бути переведений на інший ешелон.

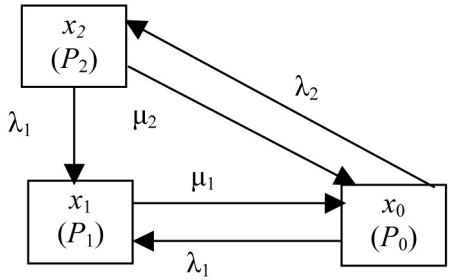

Рис.11.3. Граф станів для визначення конфлікту за умови наявності пріоритету

Граф станів для такої системи зображено на рис. 11.3.

Система диференціальних рівнянь, що описують зміну ймовірностей станів, має вигляд

$$\dot{P}_0(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t) + \mu_1 P_1(t) + \mu_2 P_2(t);$$
$$\dot{P}_1(t) = -\mu_1 P_1(t) + \lambda_1 P_0(t) + \lambda_1 P_2(t);$$
$$\dot{P}_2(t) = -(\lambda_1 + \mu_2)P_2(t) + \lambda_2 P_0(t),$$

Для стаціонарного режиму, з огляду на те, що $P_0(0) = 1;$ $P_1(0) = 0;$ $P_2(0) = 0$, визначимо ймовірності перебування точки перетину в різних станах:

$$P_0 = \frac{\mu_1(\mu_2 + \lambda_1)}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)}; \quad P_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1};$$

$$P_2 = \frac{\lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)}.$$

Для розглянутої системи кількість потенційних конфліктних ситуацій за одиницю часу

$$q = \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)}.$$

11.2. Оцінювання ризику зіткнення під час організації польотів на паралельних трасах

Важливе значення у процесі проектування структури трас має оцінювання ризику зіткнень літаків. Відповідно до методики ICAO ризик зіткнення внаслідок утрати бокового ешелонування N_{ay} визначається кількістю авіаційних подій (одне зіткнення розглядають як дві події), які можна очікувати за 10^7 год польоту по маршруту.

В основу методики покладено аналітико-статистичну модель оцінювання ризику зіткнення літаків (модель Рейха), яка подається за таких припущень:

– ризик зіткнень N_a через порушення норм ешелонування у всіх трьох вимірах x, y, z однаковий, тобто $N_{ax} = N_{ay} = N_{az}$.

– не враховується можливість авіакатастрофи під час польоту літака у вихровому потоці, утвореному іншим літаком;

– не враховується можливість зменшення ризику зіткнень маневруванням для запобігання зіткненню у разі візуального виявлення іншого літака;

– передбачається незалежність похибок витримування висоти й лінії шляху, а також незалежність витримування ліній шляху різними літаками та незалежність поздовжніх положень двох літаків.

Літак уявляється прямокутним паралелепіпедом з геометричними розмірами $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ (рис. 11.4).

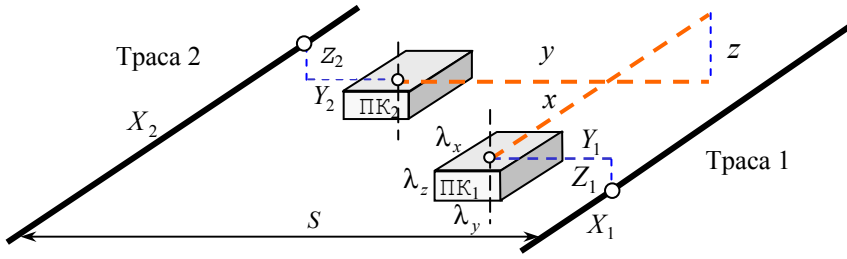

Рис. 11.4. Модель відносного положення літаків
що летять на паралельних трасах

Прийняті позначення: X, Y, Z – відхилення літака відповідно в поздовжньому, боковому й вертикальному напрямках від номінальних; $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ – відповідні швидкості відхилення; x, y, z – відносні відстані між літаками.

Якщо польотна ситуація не контролюється і немає можливості коригувати траєкторію польоту, ризик зіткнень через втрату бокового ешелонування відповідно до методики ICAO становитимє

$$N_{ay} = 10^7 \left\{ N_x P_y P_z + N_y P_z P_x + N_z P_x P_y \right\}, \qquad (11.8)$$

де N_r – кількість перекриття еквівалентних літакам паралелепіпедів у напрямку r $(r = x, y, z)$ на льотну годину; P_r – імовірність того, що перекриття відбудеться в напрямку r.

Середню кількість перекриття визначають за умов незалежних відносних швидкостей літаків $|\bar{\dot{x}}|, |\bar{\dot{y}}|, |\bar{\dot{z}}|$, незалежності $|\bar{\dot{x}}|$ і $|\bar{\dot{y}}|$ від координат *X,Y,Z*. Допускається, що бокове відхилення *Y* залежить від *X*, а середня відносна бокова швидкість $|\bar{\dot{y}}|$ – від *X* і *Y*. Допускається також, що відносні швидкості під час перекриття літаків не змінюють своїх знаків. Тоді

$$N_x = \frac{P_x}{t_x} = P_x \frac{|\bar{\dot{x}}|}{2\lambda_x},$$

де t_x – середня тривалість перекриття літаків у напрямку *X*, що дорівнює відносній відстані, яка покриває при поздовжньому перекритті літаків $2\lambda_x$, поділеній на середнє значення абсолютної величини відносній поздовжньої швидкості $|\bar{\dot{x}}|$.

Аналогічно: $N_y = P_y \frac{|\bar{\dot{y}}|}{2\lambda_y}, \quad N_z = P_z \frac{|\bar{\dot{z}}|}{2\lambda_z}.$

Тоді вираз (11.8) набуде вигляду

$$N_{ay} = 10^7 P_x P_y P_z \left(\frac{|\bar{\dot{x}}|}{2\lambda_x} + \frac{|\bar{\dot{y}}|}{2\lambda_y} + \frac{|\bar{\dot{z}}|}{2\lambda_z} \right),$$

а також

$$N_{ay} = 10^7 P_x P_z \left\{ P_y \left(\frac{|\bar{\dot{x}}|}{2\lambda_x} + \frac{|\bar{\dot{z}}|}{2\lambda_z} \right) + N_y \right\}.$$

Під час руху літака по трасі, у межах якої горизонтальний політ чергується з набором висоти або зниженням, параметри P_x і P_z можуть бути об'єднані в один параметр:

$$P_{xz}=P_x P_z .$$

Імовірність бічного перекриття за умови, що розподіл бокового відхилення літака Y є функцією положення вздовж лінії шляху X, знаходять з виразу

$$P_y = 2\lambda_y \frac{1}{X_0} \int_0^{X_o} dX \int_{-\infty}^{\infty} q_1(Y,X) q_2(S-Y,X) dY ,$$

де X_0 – довжина ділянки розглянутої траси, у межах якої траєкторії польоту літака не коригуються за допомогою навігаційних засобів; $q_1(Y,X)$ – імовірність того, що літак на лінії шляху 1 буде мати бокове відхилення Y за певного значення X; $q_2(S-Y,X)$ – імовірність того, що літак на лінії шляху 2 буде мати бокове відхилення $S-Y$ за того ж значення X; S – номінальне бокове ешелонування літаків на лініях шляху без урахування похибки навігаційних засобів.

Тоді кількість перекриттів у боковому напрямку

$$N_y = \frac{1}{X_0} \int_0^{X_o} dX \int_{-\infty}^{\infty} q_1(Y,X) q_2(S-Y,X) |\bar{\dot{y}}(Y,X)| dY .$$

Оскільки зазвичай у процесі польоту ПК екіпаж з використанням бортових навігаційних систем (НС) і систем КПР періодично визначає ступінь відхилення від заданої траєкторії й коригує її, то доцільно, щоб довжина відрізка X_0 була якнайменша. Для складання функціонування комплексів НС–КПР коли траєкторія коригується за допомогою НС або системи КПР, реально довжина відрізка в кожному i-му стані комплексу дорівнює $X_{0i}/P_{\text{обсл.}i}$, де $P_{\text{обсл.}i}$ – імовірність того, що місцеположення ПК буде скориговане з урахуванням зайнятості екіпажу або диспетчера КПР у потрібний момент часу більш важливими операціями або внаслідок несправності техніки. Цю імовірність можна визначати для системи КПР мето-

дами теорії масового обслуговування, коли заявками на обслуговування є ПК, які перебувають під керуванням.

Якщо q_1 і q_2 одна й та ж функція розподілу q, тобто $q_1 = q_2 = q$, то вираз для розрахунку ризику зіткнення матиме вигляд

$$N_{ay} = 10^7 P_{xz} \int_0^{X_o} \frac{1}{X_0} dX \int_{-\infty}^{\infty} q(Y,X) q(S-Y,X) \left\{ |\bar{r}| + |\bar{y}(Y,X)| \right\} dY,$$

де $|\bar{r}| = |\bar{x}| \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + |\bar{z}| \frac{\lambda_y}{\lambda_z}$; $|\bar{y}(Y,X)|$ – середня бокова відносна швидкість польоту літаків як функція змінних Y, X.

Функцію $|\bar{y}(Y,X)|$, яку безпосередньо виміряла Північно-Атлантична група планування, у цьому разі можна отримати з розподілів $p(\dot{Y}; Y, X)$ бокових швидкостей одного ПК, яка залежить від Y, X.

Середню бокову відносну швидкість польоту літака визначають так:

$$|\bar{y}(Y,X)| = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{y}| d\dot{Y} \int_{-\infty}^{\infty} p(\dot{Y}; Y, X) p(\dot{y} - \dot{Y}; S - Y, X) dY,$$

де $p(\dot{Y})$ – щільність імовірності як функції бокової швидкості літака, зазвичай ця функція від X і Y і позначається як $p(\dot{Y}; X, Y)$.

Якщо всі параметри незалежні від X, то

$$N_{ay} = 10^7 P_{xz} \int_{-\infty}^{\infty} q(Y) q(S-Y) \left\{ |\bar{r}| + |\bar{y}(Y)| \right\} dY,$$

$$|\bar{y}(Y)| = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{y}| d\dot{Y} \int_{-\infty}^{\infty} p(\dot{Y}; Y) p(\dot{y} - \dot{Y}; S - Y) dY.$$

Якщо припустити, що $|\bar{y}|$ не залежить від Y і X, тоді

$$N_{ay} = 10^7 P_x P_y P_z \left(\frac{|\bar{x}|}{2\lambda_x} + \frac{|\bar{y}|}{2\lambda_y} + \frac{|\bar{z}|}{2\lambda_z} \right).$$

Відома методика визначення P_{xz} для випадків попутного й зустрічного рухів літаків на паралельних трасах. Після опрацювання значного статистичного матеріалу з вивчення польотів літаків у Західній Європі зроблено висновок, що в разі зустрічного руху літаків можна обирати $P_{xz} = 1{,}26 \cdot 10^{-4}$, а за зустрічного – $P_{xz} = (0{,}6 \ldots 1{,}1) \cdot 10^{-4}$.

Аналогічно можна визначати ризики зіткнень літаків на паралельних маршрутах через утрату вертикального й поздовжнього ешелонування.

Якщо літак увесь час перебуває в горизонтальному польоті, то пропонується такий вираз для визначення ймовірності P_{xz}:

$$P_{xz} = \frac{4\lambda_x P_z(0)}{V} \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2},$$

де V – швидкість польоту літака; N_1, N_2 – інтенсивність польотів літаків відповідно на трасах 1 і 2, що пролягають поруч; $P_z(0)$ – імовірність того, що два літаки не будуть мати вертикального ешелонування один відносно одного.

Для розрахунків можна покласти $P_z(0) = 0{,}25$.

У реальних системах навігації через можливі відмови апаратури і похибки, які впливають на визначення місцеположення літака, статистична модель визначення ризику зіткнень трохи відрізняється від розглянутої вище.

Реально ПК частину часу польоту на маршруті перебуває під керуванням системи КПР, а частину часу може тимчасово перебувати без коригувальних впливів системи КПР через її відмову. В обох режимах польоту з різним ступенем точності можуть бути визначені максимально можливі відхилення ПК від траєкторії польоту. Різною виявляється й довжина траси, що пролітає ПК між коригувальними діями служби КПР.

Припустимо, що екіпаж літака під час польоту по трасі довжиною X_0 контролює його рух і в разі потреби n раз коригує траєкторію польоту. Максимально можлива частота коригування траєкторії ПК за допомогою системи КПР дорівнює частоті обертання антеною оглядової РЛС і залежить від кількості ПК, що перебувають під керуванням у зоні КПР. Контролюючи щоразу траєкторію ПК за допомогою НС або системи КПР, екіпаж домагається повернення на задану траєкторію польоту в разі виявлення відхилення від неї. Чим частіше контролюється траєкторія руху, тим меншою

буде величина відхилення від норми бокового ешелонування. Це еквівалентно зменшенню довжини траси польоту ПК до величини X_0/n, у межах якої коригування не здійснюється.

За час перебування ПК у польоті можуть змінюватися структури НС і системи КПР через їх обмежену надійність. У кожному зі станів функціонування цього комплексу можуть виникати певні відхилення ПК від заданої лінії шляху внаслідок різних точнісних характеристик засобів, що входять у його склад, а отже, у кожному i-му стані можна очікувати певне значення ризику зіткнень N_{ayi}. Якщо відомо структури НС і системи КПР, графи переходів НС і КПР з одного стану в інший і відхилення кожного із ПК від заданої лінії шляху в кожному зі станів, то ризик зіткнень за весь час польоту можна визначити виразом

$$N_{ay}(t) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} N_{ayij} P_{ij}(t),$$

де N_{ayij} – ризик зіткнень двох ПК у i-му стані функціонування НС і j-му стані функціонування системи КПР; $P_{ij}(t)$ – імовірність перебування комплексу НС і системи КПР у станах i та j відповідно (через незалежність функціонування двох засобів $P_{ij}(t)=P_i(t)P_j(t)$); t – час польоту ПК по маршруту, який аналізується.

Відомим є метод розрахунку ймовірності P_{xz} для різних варіантів руху ПК на паралельних маршрутах за умови відсутності коригувального впливу служби КПР на траєкторію руху ПК.

Розрахунок ризику зіткнень для повітряного руху на паралельних маршрутах у протилежних напрямках виконують для таких варіантів.

1. Повітряний корабель увесь час перебуває в горизонтальному польоті на одному ешелоні:

$$P_{xz} = \frac{4\lambda_x P_z(0)}{V}\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2},$$

де V – швидкість польоту літаків; N_1, N_2 – інтенсивність стаціонарного потоку ПК на трасах 1 і 2.

Якщо $N_1 = N_2 = N$, то

$$P_{xz} = \frac{2}{V}\lambda_x N P_z(0).$$

Якщо $N_1 + N_2 = 2N$, $N_1 = \dfrac{2kN}{k+1}$ і $N_2 = \dfrac{2N}{k+1}$, то

$$P_{xz} = \frac{2\lambda_x P_z(0)}{V} \frac{4kN}{(k+1)^2}.$$

2. Повітряні кораблі виконують горизонтальні польоти на декількох F вертикальних ешелонах:

$$P_{xz} = 4\lambda_x P_z(0) \frac{\sum_{i=1}^{F} \frac{N_{i1} N_{i2}}{V_i^2}}{\sum_{i=1}^{F} \frac{N_{i1} + N_{i2}}{V_i}},$$

де N_{i1}, N_{i2} – інтенсивності потоків літаків уздовж ешелону польоту i у двох напрямках $(i = \overline{1,F})$; $P_z(0)$ – const для всіх ешелонів.

Якщо $V_i = V$, то $P_{xz} = \dfrac{4\lambda_x P_z(0)}{V} \dfrac{\sum_{i=1}^{F} N_{i1} N_{i2}}{\sum_{i=1}^{F} (N_{i1} + N_{i2})}$.

Методика оцінювання для повітряного руху на паралельних маршрутах в одному напрямку нічим не відрізняється від розглянутих вище.

Розроблено також методику визначення P_{xz} для випадку, коли ПК набирають висоту або знижуються. На підставі опрацювання великого масиву матеріалу для найбільш напружених європейських маршрутів розраховано значення P_{xz} для руху ПК на одному ешелоні в протилежних напрямках, що становить $(1\ldots1{,}29)\cdot10^{-4}$.

За експонентної апроксимації закону розподілу бокових відхилень ПК від заданої лінії шляху в кожному i-му стані функціонування за умови, що $|\bar{\dot{y}}|$ не залежить від X і Y, небезпека зіткнення двох ПК

$$N_{ayi} = 10^7 P_{xz} \frac{2\lambda_y \delta_1 \delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \left\{ \frac{|\bar{\dot{x}}|}{2\lambda_x} + \frac{|\bar{\dot{y}}|}{2\lambda_y} + \frac{|\bar{\dot{z}}|}{2\lambda_z} \right\} (e^{-\delta_2 S_i} - e^{-\delta_1 S_i}).$$

Якщо $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, то

$$N_{ayi} = 10^7 P_{xz} 2^{-1} \lambda_y S_i \delta^2 e^{-\delta S_i} \left\{ \frac{|\bar{\dot{x}}|}{2\lambda_x} + \frac{|\bar{\dot{y}}|}{2\lambda_y} + \frac{|\bar{\dot{z}}|}{2\lambda_z} \right\}.$$

За нормального закону розподілу відхилень ПК

$$N_{ayi} = 10^7 P_{xz} \frac{\lambda_y}{\pi\sigma_1\sigma_2} \left\{ \frac{|\bar{\dot{x}}|}{2\lambda_x} + \frac{|\bar{\dot{y}}|}{2\lambda_y} + \frac{|\bar{\dot{z}}|}{2\lambda_z} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\left[\frac{y^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(S_i - y)^2}{2\sigma_2^2} \right] \right\} dy .$$

Тут $\delta_1 = \frac{1}{\sigma_1}$ і $\delta_2 = \frac{1}{\sigma_2}$ – параметри закону розподілу бокових відхилень; σ_1, σ_2 – середньоквадратичні відхилення параметрів польоту ПК від норм бокового ешелонування.

У використаних для обчислення N_{ayi} виразах норма ешелонування S_i має визначати мінімально можливе (за довірчої імовірності 0,997) значення норми ешелонування в i-му стані функціонуванні комплексу. Значення S_i залежить від характеристик точності НС і технології їх використання в процесі польоту літака.

Будь-яке порушення норми ешелонування розглядають як небезпечне зближення ПК. Якщо подати ПК як паралелепіпед з розмірами сторін S_x, S_y, S_z, то, зробивши відповідну заміну λ_r на S_r, можна визначити ризик поява небезпечних зближень:

$$N'_{ay} = 10^7 P'_y P'_{xz} \left(\frac{|\bar{\dot{x}}|}{2S_x} + \frac{|\bar{\dot{y}}|}{2S_y} + \frac{|\bar{\dot{z}}|}{2S_z} \right);$$

$$P'_y = 2S_y \frac{1}{X_0} \int_0^{X_0} dX \int_{-\infty}^{\infty} q(Y, X) q(S_y - Y, X) dY ;$$

$$P'_{xz} = 4N_1 N_2 S_x P_z(0) \left[V(N_1 + N_2) \right]^{-1} .$$

Коефіцієнт зв'язності $K_{зв}$ між небезпечними зближеннями й зіткненнями визначають як відношення відповідних ризиків:

$$K_{зв} = \frac{N'_{ay}}{N_{ay}} .$$

Під $K_{зв}$ розуміють величину, обернену умовній ймовірності того, що зіткнення ПК відбудеться в результаті небезпечного зближення.

Оскільки закони розподілу часу появи небезпечних зближень і зіткнень однакові, то $K_{зв}$ визначають так:

$$K_{\text{зв}} = \frac{S_x}{\lambda_x}\frac{S_y}{\lambda_y}\frac{\frac{|\bar{\dot{x}}|}{2S_x}+\frac{|\bar{\dot{y}}|}{2S_y}+\frac{|\bar{\dot{z}}|}{2S_z}}{\frac{|\bar{\dot{x}}|}{2\lambda_x}+\frac{|\bar{\dot{y}}|}{2\lambda_y}+\frac{|\bar{\dot{z}}|}{2\lambda_z}}. \qquad (11.9)$$

Розрахунки показують, що кожне зіткнення ПК може статися в результаті появи від сотень до десятків тисяч небезпечних зближень ПК.

З урахуванням впливу НС і системи КПР коефіцієнт зв'язності (11.9) розраховують як

$$K_{\text{зв}} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} N'_{ayij} P_{ij}(t)}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} N_{ayij} P_{ij}(t)}.$$

Упровадження АС КПР дозволяє значною мірою зменшити кількість небезпечних зближень, а отже, і кількість зіткнень ПК. В АС КПР є можливість автоматичної реєстрації небезпечних зближень. Знаючи значення $K_{\text{зв}}$, можна визначити ризик зіткнень ПК в аналізованій зоні. Але можливості аналітичних методів розрахунку ризику зіткнень і коефіцієнта зв'язності обмежені.

Надана методика оцінювання ризику зіткнень ПК дозволяє враховувати характеристики точності та надійності всіх НС, що входять до комплексу. Оскільки можливі відмови будь-якого обладнання на борту літака й погіршення точністних характеристик навігаційного комплексу в разі переходу його з одного стану в інший, варто збільшувати норми ешелонування для збереження ризику зіткнень на допустимому рівні. Забезпечувати таку зміну норм ешелонування в процесі польоту не завжди вдається, тому потрібно забезпечувати високий рівень надійності обладнання й певний запас щодо норми ешелонування.

Методику ІСАО можна використовувати для визначення норм бокового ешелонування, максимальної інтенсивності польотів, потрібних характеристик точності й надійності засобів навігації і КПР.

11.3. Визначення безпечної ширини траси

і періодичності коригування місцеположення літака

У процесі організації і здійснення КПР чимало заходів, спрямованих на забезпечення необхідної безпеки польотів, потребують аналізу характеристик процесу руху літаків, що має випадковий характер. Важливою характеристикою випадкового процесу $z(t)$, що встановлює зв'язок процесу в часі, є кореляційна функція

$$K_z(t_1,t_2) = M\{z(t_1)z(t_2)\},$$

де $M\{\bullet\}$ – математичне сподівання; t_1, t_2 – моменти часу.

Характеристики випадкового процесу $z(t)$ відхилення літака від лінії заданого шляху є функціями часу, тобто випадковий процес належить до класу нестаціонарних. Однак, зважаючи на досить часте коригування положення літака, вважають процес квазістаціонарним з нормальним розподіленням. Для стаціонарних процесів кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_z(t_1,t_2) = K_z(\tau).$$

Результати статистичного оброблення даних вимірювань траєкторій руху літаків показують, що нормована кореляційна функція відхилення літака від лінії заданого шляху може бути апроксимована виразом

$$r_z(\tau) = \frac{K_z(\tau)}{K_z(0)} = e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega\tau + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega|\tau|\right), \qquad (11.10)$$

де α, ω – параметри кореляційної функції.

Для вибору безпечної ширини траси, контролю положення літака і втримання його в установлених межах можна застосовувати теорію викидів випадкових процесів.

Одну з реалізацій випадкового процесу зображено на рис.11.5, яка розглядається як траєкторія руху літака. На графіку показано характеристики процесу: τ_0 – момент часу, коли вперше відбувається перевищення заданого рівня (допустимого відхилення від лінії заданого шляху); τ_c – тривалість викиду; l_m – значення максимуму відхилення.

Важливе значення має кількість перетинань N установленого рівня h, тобто кількість виходів літака за межу траси. Середня кі-

лькість додатних викидів за одиницю часу на рівні h/σ_z для нормального стаціонарного процесу визначають за формулою

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-r''(0)}\; e^{-\frac{(h-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}, \qquad (11.11)$$

де r'' – значення другої похідної від нормованої кореляційної функції випадкового процесу при аргументі $\tau = 0$; m_z – математичне сподівання; σ_z – середньоквадратичне відхилення.

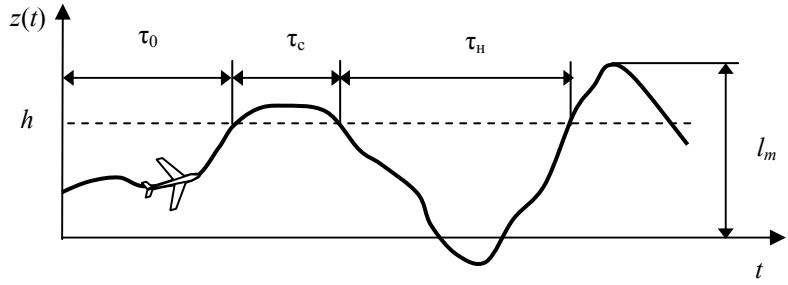

Рис.11.5. Характеристики траєкторії польоту
як випадкового процесу

Середня кількість викидів як знизу вгору за рівень *h,* так і зверху вниз за рівень h на інтервалі часу *t,* дорівнює

$$N_t = 2Nt\,. \qquad (11.12)$$

Середні тривалості викидів та інтервалів між ними визначають за виразами:

$$\tau_e = \frac{2\pi}{\sqrt{-r''(0)}}\left[1-\Phi\left(\frac{h-m_z}{\sigma_z}\right)\right]e^{-\frac{(h-m_z)^2}{2\sigma_z^2}};$$

$$\tau_u = \frac{2\pi}{\sqrt{-r''(0)}}\Phi\left(\frac{h-m_z}{\sigma_z}\right)e^{-\frac{(h-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}, \qquad (11.13)$$

де $\Phi(\bullet)$ – таблична функція Лапласа.

При цьому

$$\frac{1}{N} = \tau_e + \tau_u\,.$$

Значення τ_0 можна аналітично отримати тільки для випадкових марковських процесів і зазвичай – за експериментальними даними.

Середня кількість виходів літака за межі траси за час його польоту досить мала, тому вважається, що поява послідовності виходів є незалежними рідкісними подіями, розподіленими за законом Пуассона, для якого ймовірність k виходів за встановлений поріг протягом розглянутого проміжку часу t визначають виразом

$$P_k = \frac{(N_t)^k}{k!} e^{-N_t} . \qquad (11.14)$$

Важливою характеристикою є ймовірність того, що літак жодного разу не вийде за встановлений поріг. Цю ймовірність визначають з виразу (11.14), якщо $k = 0$:

$$P_0 = e^{-N_t} . \qquad (11.15)$$

Таким чином, за допомогою виразів (11.11), (11.12), (11.14) можна встановити зв'язок між порогом h, що визначає межу траси, імовірністю P_k заданого числа k виходів за межі траси і часом польоту t. Це дозволяє вирішувати такі навігаційні завдання, як визначення ширини коридору, ймовірності утримання літака в заданих межах траси, періодичності коригування положення літака та ін.

Частоту втручання служби КПР відповідно до коригування положення літака оцінюють за частотою виходу літака за встановлену межу.

Приклад 11.1. Визначити ширину траси за умови, що з імовірністю $P_0 = 0{,}997$ протягом однієї години польоту t = 1 год не буде жодного виходу літака за межі траси. Кореляційна функція процесу відхилення від лінії заданого шляху має вигляд (11.10) для значень параметрів: $\sigma_z = 3{,}8$ км; $\omega = 0{,}25$ рад/хв; $\alpha = 0{,}16$ 1/хв.

Розв'язання. Для заданої імовірності середня кількість виходів N протягом заданого часу визначаємо відповідно до виразу (11.15):

$$N_t = -\ln P_0 ,$$

а середню кількість позитивних виходів за одиницю часу згідно з рівнянням

$$N = \frac{N_t}{2t} .$$

Середню кількість виходів N можна визначати за формулою (11.11). Тоді, з огляду на те, що математичне сподівання процесу відхилення дорівнює нулю, можна записати

$$-\ln P_0 = \frac{t}{\pi}\sqrt{-r''(0)}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sigma_z}\right)^2}. \qquad (11.16)$$

Записавши цей вираз щодо заданого рівня h, визначимо

$$h = \sigma_z \sqrt{2\ln\frac{t\sqrt{-r''(0)}}{-\pi\ln(P_0)}}.$$

Підставивши вихідні дані в отриманий вираз, одержуємо значення ширини траси

$$h = 3{,}8\sqrt{2\ln\frac{60\sqrt{0{,}088}}{-3{,}14\ln(0{,}997)}} \approx 14{,}759 \text{ км}.$$

Як видно з прикладу 11.1 ширина траси визначається її довжиною (часом польоту), кореляційною функцією і заданою ймовірністю P_0. При цьому необхідно враховувати, що час польоту необов'язково має дорівнювати загальній тривалості польоту по маршруту, тому що точність витримування лінії заданого шляху визначається ступенем забезпечення траси навігаційними засобами, можливістю визначення поточних координат літака за допомогою як бортових, так і наземних навігаційних засобів, ступенем автоматизації польоту по заданій траєкторії та ін. Наприклад, якщо на маршруті розташовані засоби точного приводу, то за час t можна брати тривалість польоту від однієї станції до іншої.

Приклад 11.2. Визначити інтервал часу, протягом якого з імовірністю $P_0 = 0{,}95$ не буде жодного виходу літака за межі траси шириною 10 км. Кореляційна функція відхилення має вигляд виразу (11.10) для значення параметрів із прикладу 11.1.

Розв'язання. Використовуючи ті самі вихідні дані, що й у прикладі 11.1, приходимо до виразу (11.16). Розв'язавши його щодо часу польоту *t,* одержимо шуканий вираз

$$t = \frac{-\ln P_0\, \pi e^{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sigma_z}\right)^2}}{\sqrt{-r''(0)}}.$$

Для заданих вихідних даних шуканий інтервал часу

$$t = \frac{-\ln(0{,}95)\cdot 3{,}14 e^{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3{,}8}\right)^2}}{\sqrt{0{,}088}} = 1{,}29 \text{ хв.}$$

Результат, отриманий у процесі розв'язання прикладу 11.2**,** показує, що для того, щоб з високою імовірністю утримувати літак у межах траси, необхідно майже неперервно контролювати і вчасно виправляти положення літака. Імовірність P_0 недоцільно задавати надто великою, тому що відхилення літака за межі траси не завжди варто розглядати як небезпечну ситуацію.

Виконуючи розрахунки, припускаємо, щоб за час t було не більше одного відхилення літака за межі траси. Імовірність такої події визначаємо за виразом

$$P_1 = (1 + N_t) e^{-N_t} . \qquad (11.17)$$

Приклад 11.3. Визначити середній інтервал часу між двома точними визначеннями місцеположення літака за ширини траси, що дорівнює 10 км, і кореляційної функції такої ж, як у прикладі 11.1 Виконати ймовірнісну оцінку числа k відхилень за межі траси.

Розв'язання. Визначимо середній інтервал τ_u відповідно до виразу (11.13):

$$\tau_u = \frac{2\cdot 3{,}14}{\sqrt{0{,}088}} \Phi\left(\frac{5}{3{,}8}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3{,}8}\right)^2} = 3{,}61 \text{ хв.}$$

З огляду на те, що задано двосторонній рівень, середнє значення варто зменшити вдвічі:

$$\tau_u = 1{,}805 \text{ хв.}$$

Визначимо ймовірність того, що літак за інтервал часу між двома визначеннями місцеположення літака жодного разу не вийде за межі траси. Для цього за формулами (11.11) і (11.12) визначимо середню кількість виходів за одиницю часу:

$$N_t = 2\cdot 1{,}805 \cdot \frac{1}{2\cdot 3{,}14} \sqrt{0{,}088}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3{,}8}\right)^2} = 0{,}0718 ,$$

тоді згідно з виразом (11.15)

$$P_0 = e^{-0,0718} \approx 0,931 .$$

Визначимо ймовірність P_1 того, що не буде більше одного відхилення. Відповідно до виразу (11.17)

$$P_1 = (1 + 0,0718)\, e^{-0,0718} \approx 0,997 .$$

11.4. Оцінювання завантаженості повітряного простору

Оцінювання завантаженості повітряного простору потрібне для своєчасного виявлення потенційно конфліктних ситуацій, а за високої інтенсивності руху для запобігання можливому перевищенню допустимого рівня пропускної здатності як окремих ділянок, так і всієї зони КПР.

Час обслуговування літаків системою КПР залежить від точності входу і виходу літаків у підконтрольні елементи повітряного простору (ПЕПП). Ця точність залежить від правильного передпольотного розрахунку, точності витримування заданого режиму польоту, можливості коригування і залежить від умов польоту і ЛТХ літаків

До основних збурювальних чинників, що призводять до відхилення від заданої програми польоту, належать: невідповідність фактичного моменту злітання плановому, невідповідність фактичного вітру значенню вітру, використовуваного для розрахунку плану польоту, помилка витримування заданої швидкості польоту, невитримування розрахункової траєкторії набору висоти і зниження. На виконання плану польоту істотно впливають метеорологічні умови.

Багато чинників, що впливають на процес польоту, мають стохастичний характер, тому прогнозувати завантаженість підконтрольного елемента повітряного простору можна тільки у ймовірнісному розумінні.

Вичерпною характеристикою для оцінювання завантаженості ПЕПП є функція розподілу відхилень від заданого часу входу літака в ПЕПП і виходу з нього. За відомою функцією розподілу відхилень від планованого часу входу t_1 і виходу t_2 можна визначати ймовірність перебування літака всередині ПЕПП у заданому проміжку часу $\Delta T = T_2 - T_1$. Характерні випадки взаємного розміщення заданого інтервалу часу і моментів часу входу і виходу, за якими можна судити

про перебування літака в зоні КПР, показано на рис. 11.6 .

Площа заштрихованих ділянок для t_1 визначає імовірність того, що літак до моменту часу T_2 уже входив у зону, а для t_2 визначає імовірність того, що після моменту часу T_1 літак ще не проходив точки виходу із зони. Для прийняття остаточного рішення потрібно задати значення імовірності цієї події P_3 .

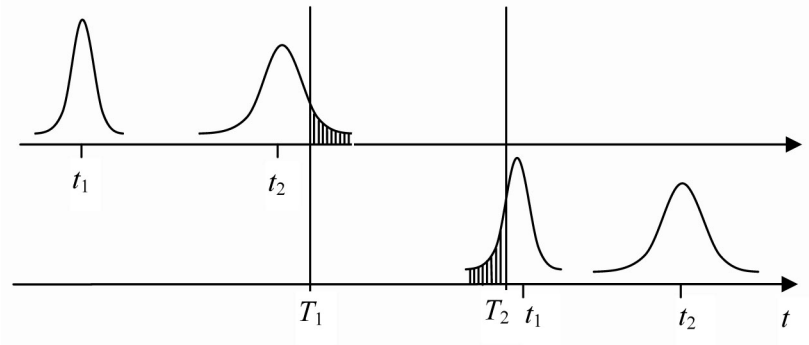

Рис. 11.6. Визначення ймовірності перебування

Рішення про перебування літака усередині ПЕПП приймають за умови виконання умови

$$P(\Delta t_1 \le \Delta T_2) \ge P_3 \quad \vee \quad P(\Delta t_2 \ge \Delta T_1) \ge P_3 , \qquad (11.18)$$

де $\Delta t_1 = t - t_1$; $\Delta t_2 = t - t_2$; $\Delta T_2 = T_2 - t_1$; $\Delta T_1 = T_1 - t_2$.

Спочатку потрібно виконати розрахунок характеристик функцій відхилень, спричинених помилками задання вітру, витримування заданої швидкості польоту і траєкторії набору висоти та зниження, помилками під час планових змін режиму польоту. Це виконують на підставі математичних моделей відхилення й апріорної інформації.

Апріорна інформація визначає статистичні характеристики величини відхилень. Так, метеоінформація може містити статистичні дані про середній вітер по сезонах, а також вимірювані і періодично обновлювані дані про фактичний вітер. Відомі статистичні характеристики помилки витримування заданої істинної швидкості польоту. За кожним аеропортом можна зібрати статистику відхилень часу вильоту від запланованого і т. ін.

Невизначеність майбутньої ситуації може бути значно зменшена, якщо надходить фактична інформація про об’єкт, тобто якщо

система оцінювання замкнута щодо результатів оцінки. Так, за відомого фактичного часу вильоту різко зменшується невизначеність майбутнього положення літака. Знання вітрових збурювань дозволяє більш точно оцінити відхилення.

Після визначення характеристик відхилень, спричинених окремими чинниками, на наступному етапі оцінювання визначається функція розподілу сумарного відхилення. Величина результуючого відхилення є випадковою величиною і сумою декількох незалежних випадкових величин.

Для вирішення поставленого завдання можна використати властивості композиції декількох випадкових величин. Композицією називають визначення щільності розподілу суми декількох незалежних випадкових величин. Так, для двох випадкових величин x_1 і x_2, що підкоряються відповідним законам розподілу, щільність розподілу $f(x)$ їх суми $x = x_1 + x_2$ визначають за виразом

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(x - x_1) dx_1 .$$

Завдання спрощується, якщо незалежні випадкові величини підкоряються нормальному закону розподілу. У цьому разі при їх композиції знову виходить нормальний закон. При цьому математичні сподівання і дисперсії підсумовують:

$$m_x = m_{x1} + m_{x2};$$
$$\sigma_x^2 = \sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 .$$

Це правило поширюється на будь-яке довільне число незалежних випадкових величин для визначення сумарних значень m_Σ, σ_Σ.

Функція щільності розподілу сумарного відхилення може визначатися в результаті послідовного виконання операції композиції.

За знайденою сумарною щільністю розподілу оцінюють перебування літака всередині ПЕПП із заданою ймовірністю P_3 на заданому проміжку часу $\Delta T = T_2 - T_1$ згідно з рівнянням (11.18).

Вирішення поставленого завдання значно спрощується в тому випадку, якщо сумарне відхилення підкоряється нормальному закону розподілу. Тоді процедура прийняття рішення зводиться до розв'язання системи нерівностей, якщо задавати значення імовірності P_3 таким чином, щоб граничнодопустимі значення випадкової вели-

чини були кратними величині середньоквадратичного відхилення σ.

Наприклад, для $P_3 = 0{,}023$ умова перебування літака в ПЕПП у заданому проміжку часу ΔT, зумовлена виразом (11.18), набуває вигляду

$$P\left\{(m_{\Sigma 1} - 2\sigma_{\Sigma 1}) < (T_2 - t_1)\right\} > 0{,}023;$$
$$P\left\{(m_{\Sigma 2} + 2\sigma_{\Sigma 2}) > (T_1 - t_2)\right\} > 0{,}023,$$

де $m_{\Sigma 1}, \sigma_{\Sigma 1}$ і $m_{\Sigma 2}, \sigma_{\Sigma 2}$ – математичні сподівання і середньоквадратичні значення сумарного відхилення від запланованого часу входу t_1 і виходу t_2 відповідно.

Звідси переходимо до перевірки системи нерівностей

$$(m_{\Sigma 1} - 2\sigma_{\Sigma 1}) < (T_2 - t_1);$$
$$(m_{\Sigma 2} + 2\sigma_{\Sigma 2}) > (T_1 - t_2).$$

Імовірність перебування літака в заданому просторі можна оцінювати не тільки за часом входу і виходу, але також і за оцінкою місцеположення літака відносно координат точок входу і виходу ПЕПП. Для кожного маршруту, що проходить крізь ПЕПП, координати точок входу і виходу задаються відстанями уздовж маршруту польоту (S_1^i; S_2^i; i – номеримаршруту), що проходить через ці точки.

Потреба в переході від аналізу відхилення в часі до аналізу відхилень за відстанню виникає тоді, коли не можна записати в явному вигляді і визначити характеристики функції розподілу часу відхилення.

Якщо визначені функції розподілу величини відхилення літака за відстанню відносно точок $S(T_1); S(T_2)$, що відповідають положенню літака за умови виконання польоту за планом у моменти часу, які відповідають межам заданого інтервалу часу T_1, T_2, то рішення про перебування літака всередині ПЕПП у заданому проміжку часу ΔT приймають за умови

$$P(\Delta S_1 \geq \Delta S(T_1)) \geq P_3 \quad \vee \quad P(\Delta S_2 \leq \Delta S(T_2)) \geq P_3,$$

де $\Delta S_1 = S - S(T_1)$; $\Delta S_2 = S - S(T_2)$; $\Delta S(T_1) = S_1 - S(T_1)$; $\Delta S(T_2) = S_2 - S(T_2)$.

Ця процедура більш трудомістка, тому що для нового часового інтервалу потрібно заново визначати розподіл відхилення від-

носно точок.

Для визначення статистичних характеристик окремих чинників, що впливають на відхилення від заданих параметрів траєкторії польоту, можна використовувати такі математичні моделі.

Відхилення від заданої програми польоту, зумовлені помилкою витримування заданої швидкості польоту, можна оцінити на підставі ряду експериментальних досліджень, які показують, що коливання швидкості від заданого значення не залежать від способу пілотування, мають випадковий характер і майже не залежить від висотного ешелону і можуть бути виражені випадковим процесом із нульовим математичним сподіванням. Цей процес підкоряється нормальному закону розподілу. Отримана в результаті оброблення експериментальних даних кореляційна функція відхилення швидкості польоту може бути апроксимована як

$$K_V(\tau) = \sigma_V^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos\beta\tau .$$

Дисперсія відхилення від заданої точки за дальністю визначається в результаті інтегрування

$$\sigma_S^2(t) = 2\int_0^t (t-\tau) K_V(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{2\sigma_V^2}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\alpha t + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left[(\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta\sin\beta t\right] + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right\}.$$

Вибір математичної моделі відхилень від заданої програми руху через помилку задання вітру залежить від способу врахування вітру для розрахунку попереднього плану польоту.

Якщо врахувати в польоті середній вітер $\overline{w}$, математичне сподівання тривалості польоту m_t на ділянці довжиною S і його середньоквадратичне відхилення σ_t, яке зумовлено помилкою врахування вітру σ_w та помилкою витримування заданої швидкості польоту σ_V, визначають за виразами:

$$m_t = \frac{S}{\overline{V}+\overline{w}} + \frac{S}{(\overline{V}+\overline{w})^3}\left[\sigma_w^2 + \sigma_V^2\right];$$

$$\sigma_t^2 = \frac{S^2}{(\overline{V}+\overline{w})^4}\left[\sigma_w^2+\sigma_V^2\right]+\frac{2S^2}{(\overline{V}+\overline{w})^6}\left[\sigma_w^4+\sigma_V^4+2\sigma_w^2\sigma_V^2\right].$$

У випадку використання періодично обновлюваних метеоданих w_u математичне сподівання вітру m_w і його середньоквадратичне значення σ_w можна уточнювати з урахуванням мінливості вітру з моменту його вимірювання t_u до моменту $t_{0.5}$, коли ПК пролетить половину ділянки, за формулами:

$$\tilde{m}_w = m_w + [1-0{,}02(t_{0.5}-t_u)](w_u - m_w);$$

$$\tilde{\sigma}_w = \sigma_w\sqrt{1-[1-0{,}02(t_{0.5}-t_u)]^2}\ .$$

Якщо відомі дані про похибки вимірювання вітру σ_u, то цю похибку можна врахувати, використовуючи вираз

$$\tilde{\sigma}'_w = \sqrt{\tilde{\sigma}_w^2+\sigma_u^2}\ .$$

Статистичні характеристики навігаційних похибок визначають залежно від використовуваних навігаційних засобів і методів навігації.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Для оцінювання характеристик і параметрів системи організації повітряного руху можна використовувати як аналітичне, так і імітаційне (статистичне) моделювання.

У разі аналітичного моделювання процес функціонування елементів системи чи всієї системи записують у вигляді деяких математичних співвідношень як детермінованих, так і ймовірнісних.

Аналітичні моделі можуть бути досліджені аналітичним методом, коли існує явна залежність, що пов'язує шукані параметри з початковими умовами, параметрами і змінними системи; числовим методом, якщо рівняння не розв'язуються в явному вигляді, або якісно, коли, не маючи розв'язку в явному вигляді, знаходять деякі показники властивостей.

Перевагою аналітичного моделювання за наявності явних залежностей є спільність одержуваних результатів. Однак практично

не вдається одержати аналітичні залежності, що адекватно описують елементи складної системи і їх взаємодію.

Аналітичне моделювання використовують для розроблення методик розрахунку показників системи ОПР таких, як методики оцінювання структури повітряного простору, його завантаження, складності польотної ситуації, імовірності появи конфліктних ситуацій та ін.

Перевагою статистичного моделювання є можливість розв'язання задач для структурно громіздких систем зі складними логічними і функціональними зв'язками за стохастичного характеру впливу великої кількості чинників; за наявності в системі груп людей, що виконують функції елемента, що приймає рішення, і дають керувальні команди; для перевірки нових організаційних структур і технологій керування; а також, якщо проведення експерименту з реальною системою пов'язано з великим ризиком або з великими фінансовими витратами.

Характерним для статистичного моделювання є те, що воно не передбачає потреби в описі реальної системи у вигляді рівнянь. У процесі моделювання алгоритм відтворює процес функціонування системи зі збереженням логічної структури і послідовності в часі.

Для проведення імітаційного моделювання застосовують два принципи формування подій: принцип, що дозволяє визначати послідовні стани через деякі інтервали часу (принцип Δt) і принцип послідовності подій. Перший принцип полягає в тому, що стани системи визначаються в дискретні моменти часу, як правило, розділеними однаковими інтервалами часу Δt. Недоліком такого моделювання є те, що зменшення Δt призводить до різкого збільшення часу моделювання, росте ймовірність влучення в інтервал моделювання двох і більше подій, що знижує точність і достовірність моделювання. Якщо поводження системи між подіями не становить інтерес, то моделювання доцільно виконувати із застосуванням другого принципу. Цей принцип забезпечує високу економність алгоритму за рахунок опрацювання подій тільки в моменти їх надходження. Однак алгоритми такого типу мають більш складну структуру.

Оскільки результат моделювання системи ОПР у загальному випадку є реалізацією випадкових величин і функцій, то для визначення характеристик процесу потрібно його багаторазово відтворювати з наступним статистичним обробленням.

Статистичне моделювання дозволяє кількісно оцінити варіанти організаційних рішень щодо збільшення пропускної здатності та підвищення ефективності повітряного простору, а також досліджувати вплив таких чинників, як структура потоку літаків, ЛТХ, різні технології керування, рівень автоматизації, навігаційні похибки і помилки пілотування, режимні обмеження, метеорологічні умови та ін.

Питання для самоперевірки

1. Які переваги та недоліки аналітичного моделювання?
2. Як визначають метод статистичного моделювання?
3. Які переваги має метод статистичного моделювання, які його недоліки?
4. Укажіть особливості застосування методу статистичного моделювання для дослідження системи КПР.
5. Наведіть узагальнену методику статистичного моделювання системи КПР.
6. Що є інформаційною основою для статистичного моделювання?
7. За яких умов можна використовувати розподіл Пуассона для опису повітряного руху і процесів у системі КПР?
8. Як характеризують стаціонарний випадковий процес?
9. Які властивості процесу польоту літака відображують параметри кореляційної функції?
10. Які показники і характеристики системи повітряного руху можуть бути визначені використанням методу математичного моделювання?

ПІСЛЯМОВА

За матеріалом, викладеним у навчальному посібнику, можна бачити, що аеронавігаційна система являє собою дуже складну систему, яка містить технічні, програмні засоби, використовує сучасні інформаційні технології, методи і системи керування динамічними процесами та об'єктами, прийняття рішення щодо збереження потрібного рівня безпеки польотів. Ця система являє собою інтегрований комплекс бортових і наземних засобів. За умови присутності у контурі керування як на борту, так і на землі людини (пілота и диспетчера відповідно), необхідно брати до уваги також людський фактор.

Очевидно, що за умови багатофункціональності та складності АНС, наявності великої кількості складових, а також чинників, які до того ж мають випадковий характер, неможливо охопити повною мірою всі питання, пов'язані з вивченням та дослідженням АНС методом моделювання. Більше того не вирішено проблеми моделювання, пов'язані з математичною формалізацією для опису багатьох процесів, особливо процесу прийняття рішення. Тому в навчальному посібнику розглянуто тільки основні питання, які на думку авторів, можуть скласти досить потужну базу для виконання навчальної роботи, підготовки курсових робіт, курсових проектів, дипломних проектів (робіт) та магістерських робіт.

Розглянутій математичний апарат, методи та методика моделювання можна буде використати також на початковому етапі наукового дослідження в галузі аеронавігації. Тут можна вказати на такі актуальні завдання, які потребують для свого вирішення застосування методів моделювання, як створення системи управління безпекою в аеронавігаційних системах, що пов'язано з контролем факторів ризику; розроблення нових показників безпеки, більш достовірних методів оцінювання конфліктних ситуацій і ризику зіткнення літаків. Актуальним є застосування методів моделювання для дослідження і оцінювання ефективності впровадження нових концепцій організації повітряного руху, а також для дослідження методів і процедур підтримання прийняття рішення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Безпека* авіації /В.П. Бабак, В. П. Харченко, В. О. Максимов та ін.; за ред. В. П. Бабака. – К.: Техніка. – 2004. – 584 с.

2. *Автоматизированные* системы управления воздушным движением: Новые информационные технологии в транспорте: учеб. пособие / Р. М. Ахмедов, А. А. Бибутов, А. В. Васильев и др.; под ред. С. Г. Пятко и А. С. Красова. – СПб.: Политехника, 2004.– 446 с.

3. *Кузьмин С.З.* Цифровая радиолокация. Введение в теорию.– К.: КВІЦ, 2000. – 428 с.

4. *Анодина Т. Г., Мокшанов В. И.* Моделирование процессов в системах управления воздушным движением. – М.: Радио и связь. 1993. – 260 с.

5. *Васильев В. И., Иванюк А. И., Свириденко В. А.* Моделирование систем гражданской авиации: учебник для вузов гражданской авиации / под ред. В. И. Васильева. – М.: Транспорт, 1988. – 312 с.

6. *Советов Б.Я., Яковлев С.А.* Моделирование систем: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 217 с.

7. *Унгурян С. Г., Маркович Е. Д., Волевач А. И.* Анализ и моделирование систем управления воздушным движением. – М.: Транспорт, 1980. – 205 с.

8. *Организация* воздушного движения (Doc. 4444). – 14-е изд. – Монреаль, ICAO, 2001. – 293 с.

9. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1983. – 432 с.

10. *Strela* ATC Center. System Design Description //Alenia Marconi. – 1999.

11. *Харченко В.П., Кукуш А.Г., Васильев В.Н.* Методы оценки вероятности конфликтов для системы управления воздушным движением //Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 1.– С. 88–97.

12. *Васильєв В. М.* Методи прогнозування й оцінки ймовірності конфліктів при польоті літаків на маршрутах // Вісн. НАУ. – 2004. – № 2. – С. 24–29.

13. *Васильєв В.М.* Прогнозна оцінка витримування планів польотів при контролі повітряного руху //Вісн. НАУ. – 2001. – №3. – С. 131–135.

14. *Тарасов В.Г.* Межсамолетная навигация. – М.: Машиностроение, 1980. – 184 с.

15. *Харченко В. П., Кукуш О. Г., Бабак Є. А., Закора С. А.* Класифікація конфліктних ситуацій між літальними апаратами та вибір зон безпеки //Вісн. НАУ. – 2002. – №3.– С. 79–88.

16. *Methodology* for derivation of separation minima applied to the spacing between parallel tracks in ATS route structures. – ICAO Circular 120-AN/89/2, Montreal, 1976. – 268 p.

17. *Manual* on airspace planning methodology for the determination of separation minima: Doc 9689-AN/953 / ICAO. – Montreal, 1998. – 115 p.

Навчальне видання

ВАСИЛЬЄВ Володимир Миколайович
ХАРЧЕНКО Володимир Петрович

МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОНАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМ

ОБРОБЛЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ТА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У СИСТЕМІ КЕРУВАННЯ ПОВІТРЯНИМ РУХОМ

Навчальний посібник

Редактор Р.*М. Шульженко*
Технічний редактор *А.І. Лавринович*
Коректор *О.О. Крусь*
Верстка *Л.А. Шевченко*

Підп. до друку 12.02.08. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. арк.2,25.
Тираж 100 пр. Замовлення № 20-1. Вид. № 81/ ІІІ.

Видавництво НАУ
03680. Київ-680, проспект Космонавта Комарова, 1.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002